Themen für Bachelor/Masterarbeiten im Bereich Optimierung

Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik

Bettina Klinz

Stand März 2016

Im Anschluss werden mögliche Themen für Bachelorthemen vorgeschlagen. Einige davon sind auch für Masterarbeiten geeignet. Weitere Themen sind auf Anfrage verfügbar.

1 Earliest arrival flows

In klassischen Netzwerkflußmodellen wird die Zeit, die für die Flußverschickung über Kanten benötigt wird, nicht berücksichtigt. Das Konzept von *dynamischen Flüssen* (*dynamic flows*, *flows over time*) nimmt sich dieser Schwachstelle an. Für jede Kante (i, j) wird neben den aus dem klassischen Modell bekannten Kapazitäten u_{ij} die *Durchflusszeit* (*transit time*) τ_{ij} angegeben, die bestimmt, wie lange der Fluss von i nach j benötigt. Ferner ist ein Zeithorizont T gegeben. Ein maximaler dynamischer Fluss ist ein dynamischer Fluss, der innerhalb des Zeithorizonts die maximal mögliche Flussmenge versendet. Ein earliest arrival flow (EAF) maximiert die verschickte Flussmenge nicht nur zur Zeit T , sondern auch zur Zeit $T - 1$, $T - 2$ etc.

EAFs finden Anwendungen z.B. in Evakuierungsproblemen. Bereits seit den 1960-ern weiß man, dass für den Fall einer Quelle und einer Senke stets ein EAF existiert und dass sich ein solcher in pseudopolynomialer Zeit berechnen läßt (siehe Gale [14] bzw. Minieka [32]). Hoppe und Tardos [24] gaben ein FPTAS für diesen Spezialfall an, der auf einer Skalierungsidee beruht. Für serielle parallele Graphen kann ein EAF in polynomialer Zeit gefunden werden [35].

Der Mehrquellen bzw. Mehrsenken-Fall ist komplizierter. Hier ist i.a. nicht einmal die Existenz eines EAF gesichert.

Im Fall mehrerer Quellen und einer Senke gilt weiterhin, dass stets ein EAF existiert, die Bestimmung eines solchen ist aber aufwendiger als im Fall einer Quelle und einer Senke. Hajek und Ogier [20] entwickelten den ersten polynomiellen Algorithmus für den Spezialfall mit $\tau_{ij} = 0$ für alle Kanten (i, j) . Fleischers Algorithmus [11] löst dieselbe Aufgabe effizienter. Fleischer und Skutella [13] schlugen ein FPTAS vor.

Im Fall einer Quelle und mehrerer Senken ist die Existenz eines EAF nicht gesichert. Schon für eine Quelle und zwei Senken sind einfache Beispiele bekannt, für die kein EAF existiert (siehe [11, 3]). Selbst im Spezialfall, dass $\tau_{ij} = 0$ für alle Kanten (i, j) gilt, ist die Existenz eines EAF nicht garantiert. Skutella und Schmidt [36] gelingt es jedoch für diesen Spezialfall die Netzwerke zu charakterisieren für die unabhängig von der konkreten Instanz stets ein EAF existiert.

Während sich die bisher genannten Arbeiten mit dem Fall beschäftigen, in dem die Kapazitäten und Durchflusszeiten konstant sind, ist im Fall von Evakuierungsproblemen der Fall zeitabhängiger Kantendaten besonders interessant. EAFs mit zeitabhängigen Daten wurden u.a. von Tjandra und Hamacher [39, 21] und Baumann und Köhler [2] untersucht.

Ziel der Arbeit: Es soll ein Überblick zum Thema EAF gegeben werden. Je nach individuellen Interessen kann das Thema eher theorielastig oder praktischer (mehr Gewicht auf Anwendungen in Evakuierungsproblemen oder Implementierung eines Algorithmus für eine EAF-Variante nach Absprache) ausgelegt werden.

2 Parametrische maximale Fluss- und minimale Schnittprobleme

Eine interessante Verallgemeinerung des klassischen maximalen Fluss- bzw. minimalen Schnittproblems resultiert, wenn man statt nichtnegativer Zahlen Funktionen eines Parameters λ als Kapazitäten zulässt.

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, A)$ mit Quelle $s \in V$ und Senke $t \in V$. Bezeichne $u_{ij}(\lambda) \in \mathbb{R}^+$ die Kapazität der Kante $(i, j) \in A$ in Abhängigkeit vom Parameter λ .

Bezeichne $z(\lambda)$ den Wert eines maximalen Flusses (bzw. die Kapazität eines minimalen st -Schnittes) in Abhängigkeit von λ .

Besonders gut untersucht ist der Fall affin-linearer Kapazitäten: $u_{ij}(\lambda) = v_{ij} + w_{ij}\lambda$. Für diesen Fall folgt aus der allgemeinen Theorie für lineare Programme mit einem "rechte Seite Vektor", der affin linear von einem Parameter abhängt, dass die Optimalwertfunktion $z(\lambda)$ eine stetige, stückweise lineare und konkave Funktion ist. Leider kann diese Funktion im schlimmsten Fall exponentiell viele Knickstellen (=Stellen, an denen die Steigung wechselt) aufweisen.

Aus diesem Grund sind Spezialfälle interessant (sowohl im affin-linearen Fall als im allgemeinen Fall), für die sich Strukturresultate für Optimallösung herleiten lassen, die in weiterer Folge dazu benutzt werden können die resultierenden parametrischen maximalen Flussprobleme/minimalen Schnittprobleme effizient zu lösen.

In einer bahnbrechenden Arbeit untersuchten Gallo, Grigoriadis und Tarjan [15] einen Spezialfall von affin-linearen Kapazitäten für den die Folge der minimalen Schnitte von links nach rechts (also für steigendes λ) eine Schachtelungseigenschaft (nesting property) erfüllen. Aufbauend auf dieser Struktureigenschaft zeigten sie ferner, wie der maximale Flussalgorithmus von Goldberg und Tarjan (preflow push Algorithmus) so erweitert werden kann, dass die Optimalwertfunktion $z(\lambda)$ (und pro Linearitätsintervall ein zugehöriger minimaler Schnitt/maximaler Fluss) in derselben asymptotischen Zeit bestimmt werden kann, die zur Lösung eines klassischen maximalen Flussproblems/minimalen Schnittproblems benötigt wird.

In Folgearbeiten wurden Erweiterungen behandelt, sowohl in bezug auf die Bedingungen, wann eine Schachtelungseigenschaft nachgewiesen werden kann als auch in bezug auf Anwendungen (siehe zB [30] und algorithmische Konsequenzen (zB wurde gezeigt, dass sich auch andere maximale Flussalgorithmen ohne Effizienzverlust auf den Fall der Schachtelungseigenschaft erweitern lassen, siehe z.B. [18]).

In der Arbeit von Granot et al [17] werden Ergebnisse aus den Vorgängerarbeiten verallgemeinert und in ein allgemeines Modell eingepasst, das unser Verständnis für die Bedingungen, die zum Auftreten der Schachtelungseigenschaft führen, erweitert hat.

Eine Reihe von interessanten Fragestellungen zu parametrischen maximalen Flussproblemen/minimalen Schnittproblemen sind noch ungelöst.

Für die Behandlung auf Bachelorarbeitsniveau reicht es selbstverständlich aus, sich mit der existierenden Literatur zu befassen. Das Potential für eine Ausweitung auf höherer Ebene ist vorhanden (auch in Richtung Ausdehnung von parametrischen minimalen Kostenflussproblemen zu denen noch sehr wenig bekannt ist).

3 Bilevel Rucksackprobleme

In bilevel Optimierungsproblemen gibt es eine zweistufige Hierarchie im Entscheidungsprozess: Es gibt 2 Entscheidungsträger, einen Leader (obere Ebene) und einen Follower (untere Ebene). Beide Entscheidungsträger haben jeweils ihre eigene Zielfunktion und eine eigene Menge von Restriktionen, die es einzuhalten gilt. Darüberhinaus gibt es gemeinsame Restriktionen, die die Variablen der beiden Ebenen koppeln.

Der Entscheidungsprozess läuft wie folgt ab: Zuerst trifft der Leader seine Entscheidungen und fixiert den Wert seiner Entscheidungsvariablen. Dann reagiert der Follower durch Wahl seiner Entscheidungs-

variablen. Der Leader kennt die Zielfunktion und die Restriktionen des Followers. Der Follower wählt seine Reaktion auf die Leader-Entscheidung so, dass seine Zielfunktion optimiert wird und alle Restriktionen eingehalten werden. Da die Zielfunktion des Leaders auch von den Variablen des Followers abhängt, muss der Leader die möglichen Reaktionen des Followers mit in Betracht ziehen.

Die Literatur zu Bilevel Problemen (und der Verallgemeinerung auf mehr als 2 Ebenen) ist vielfältig. Zu Bilevel Problemen im Bereich der kombinatorischen Optimierung gibt es deutlich weniger Arbeiten. Das Rucksackproblem ist ein kanonisches NP-schweres kombinatorisches Optimierungsproblem. Im Bilevel Fall wurden verschiedene Modelle vorgeschlagen: die Dempe-Richter Variante, die DeNegre Variante und die Mansi-Alves-de-Carvalho-Hanafi Variante (jeweils benannt nach den Autoren, die das Modell vorgeschlagen haben). Für die Referenzen zu den Originalarbeiten siehe die Arbeit von Caprara, Carvalho, Lodi und Woeginger [8].

Im Anschluss werden die 3 Modelle kurz vorgestellt.

1. Dempe-Richter Variante: Hier kontrolliert der Leader die Rucksackkapazität z , während der Follower die Gegenstände sowie die Variablen zu den Gegenständen kontrolliert und entscheidet welche Gegenstände in den Rucksack gepackt werden sollen. Die Zielfunktion des Leaders hängt von z und den eingepackten Gegenständen ab. Die Zielfunktion des Followers hängt nur von den eingepackten Gegenständen ab (in der klassischen linearen Art). Der Follower hat die übliche Rucksack-Restriktion zu erfüllen (hängt aber nun von der Variable z ab) und der Leader bekommt eine untere und eine obere Schranke für z vorge setzt.
2. Mansi-Alves-de-Carvalho-Hanafi Variante: In dieser Variante ist die Gegenstandsmenge in 2 Mengen aufgeteilt, die einen sind unter Kontrolle des Followers, die anderen unter Kontrolle des Leaders. Die beiden sollen einen gemeinsamen Rucksack packen. In der Zielfunktion des Leaders treten alle Gegenstandsvariablen auf. Die Restriktionen sind die üblichen Rucksackrestriktionen.
3. DeNegre Variante: In dieser Variante besitzen Leader und Follower jeweils einen eigenen Rucksack und wählen die Gegenstände dafür aus einer gemeinsamen Gegenstandsmenge. Zuerst darf der Leader einpacken, dann der Follower. Natürlich ist jeder Gegenstand nur einmal verfügbar, was die Wahl des Followers einschränkt. Der Leader möchte die Profitsumme der eingepackten Gegenstände in seinem Rucksack maximieren, der böse Follower möchte hingegen diese Profitsumme für den Leader minimieren.

Caprara et al [8] untersuchen alle 3 Varianten in bezug auf die Komplexität und auf Approximationsalgorithmen. In Caprara et al [9] liegt der Schwerpunkt auf der exakten Lösung des DeNegre Modells.

4 Bilevel kombinatorische Optimierung

Bilevel-Modelle wie oben für den Rucksackfall besprochen, lassen sich auch für andere kombinatorische Optimierungsprobleme betrachten und für einige Problemtypen wurden das auch in der Literatur mehr oder weniger ausführlich bereits umgesetzt (zB bilevel Zuordnungsprobleme [16, 4, 5]).

Es gibt keine systematische Darstellung der bereits erzielten Ergebnisse auf diesem Gebiet. Ziel einer Bachelorarbeit könnte es sein, ausgehend von einer ausführlichen Literaturrecherche eine solche systematische Darstellung der vorhandenen Ergebnisse zu erstellen.

5 Minimum mean cycles

Gegeben ist ein gerichteter Graph $G = (V, A)$ mit n Knoten, m Kanten und ganzzahligen Kantengewichten w_{ij} . Bezeichne W das maximale Kantengewicht.

Das Durchschnittsgewicht $\mu(C)$ eines Kreises C berechnet sich als Quotient aus der Summe der Gewichte der Kanten in C und der Anzahl der Kanten, also

$$\mu(C) = \frac{\sum_{(i,j) \in A} w_{ij}}{|C|}.$$

Im “minimum mean cycle problem” (MMC) möchte man einen Kreis bestimmen, der minimales Durchschnittsgewicht aufweist. Dieses Problem zählt zu den grundlegenden kombinatorischen Optimierungsproblemen und besitzt viele Anwendungen. Das minimum mean cycle Problem steht in engem Zusammenhang zum kürzesten Wegeproblem.

Die für MMC bekannten Algorithmen lassen sich in 2 Klassen einteilen: Jene, deren Laufzeit nicht von den Gewichten abhängt und den Rest.

Der erste polynomielle Algorithmus für das MMC läuft in $O(mn)$ Zeit, verwendet dynamische Programmierung und geht auf Karp [25] zurück. Ein Nachteil des Algorithmus von Karp ist, dass er auch im besten Fall $O(mn)$ Zeit benötigt. Karp und Orlin [26] verallgemeinerten das MMC stellten einen Zusammenhang zu parametrischen kürzesten Wegeproblemen her. Young, Tarjan und Orlin [41] verbesserten die Laufzeit des Verfahrens von Karp und Orlin von $O(mn \log n)$ auf $O(mn + n^2 \log n)$. Lawler [29] zeigte einen Zusammenhang zum Problem negative Kreise zu erkennen. Das MMC lässt sich durch Reduktion auf $O(\log(nW))$ Aufrufe eines Algorithmus zur Erkennung negativer Kreise lösen (dahinter steckt ein binärer Suchansatz). Orlin und Ahuja ersetzten die exakte binäre Suche durch eine approximative binäre Suche und erhielten durch den zusätzlichen Einsatz einer Skalierungstechnik einen $O(m\sqrt{n} \log(nW))$ Algorithmus für MMC.

Es ist nicht bekannt, ob die Laufzeit des Algorithmus von Orlin und Ahuja unterboten werden kann, wenn MMC exakt gelöst werden soll. Chatterjee, Henzinger, Krinninger und Loitzenbauer [10] geben für den Fall mit nichtnegativen Gewichten einen $(1 + \varepsilon)$ -Approximationsalgorithmus an. Ferner wird ein Zusammenhang zur Min-Plus Matrixmultiplikation und zum all pairs kürzesten Wegeproblem hergestellt (Zusammenhang mit bahnbrechenden Resultaten von Vassilevska Williams and Williams).

Je nach individueller Interessenlage kann die Arbeit einen experimentellen Anteil enthalten oder sich stärker theoretisch orientieren.

6 Sports elimination problems

Ein klassisches Problem, das bereits in den 1960-er Jahren erstmals untersucht wurde, ist, ob ein Baseball-Team zu einem bestimmten Zeitpunkt der Meisterschaft noch Meister werden kann oder nicht. Etwas spezifischer: Gegeben sind n Baseballteams einer Liga. Zu einem konkreten Zeitpunkt der Meisterschaft habe Team i w_i Siege erworben und es verbleiben g_{ij} zu absolvierende Partien zwischen Teams i und j . Ein Team wird eliminiert genannt wenn es es nicht möglich ist, daß dieses Team am Ende der Meisterschaft Platz 1 einnimmt (evtl. zusammen mit punktgleichen Teams).

Schwartz [37] führte die Fragestellung, ob ein einzelnes Team eliminiert ist, auf ein maximales Flussproblem zurück. Hoffman und Rivlin [23] verallgemeinerten dieses Ergebnis und charakterisierten, wann ein Team nicht mehr Platz q erreichen kann.

Gusfield und Martel[18] und McCormick [30] bestimmten die sogenannte Eliminationszahl, das ist die minimale Anzahl verbliebener Partien, die ein Team gewinnen muss, um eine Chance auf Platz 1 zu haben. Die Methoden greifen auf Ergebnisse zu parametrischen maximalen Flussproblemen zurück [15]. Ferner zeigte McCormick, dass es NP-vollständig ist zu entscheiden, ob ein Team noch mindestens Platz q erreichen kann.

Wayne [40] zeigte, daß es eine Schwellwertpunktzahl W^* gibt, sodass gilt, daß Team i genau dann eliminiert ist, wenn $w_i + g_i < W^*$ wobei g_i die Anzahl der Spiele bezeichnet, die Team i noch zu absolvieren hat. Basierend auf dieser Charakterisierung lassen sich alle eliminierten Teams mithilfe

eines einzigen maximalen Flussproblems bestimmen. Ein analoges Strukturresultat zeigten unabhängig davon Adler et al. [1] unter Verwendung von linearen Programmierungsmethoden.

Gusfield und Martel verallgemeinern die Charakterisierungen aus [40] und [1]. Es werden allgemeinere Schwellwertresultate erzielt, u.a. auch für den Fall von Fussball. Die Ergebnisse werden auf nicht algorithmischem Wege hergeleitet. Die Arbeit enthält auch neue Komplexitätsergebnisse zu verwandten Fragestellungen.

Bernhold et al. [6] untersuchen das Eliminationsproblem für Fussball für die Situation in der der Sieger 3 Punkte erhält und zeigen, dass das Problem NP-vollständig ist.

Kern und Paulusma [28] untersuchen die Komplexität einer allgemeineren Problemstellung von Bewerbungsformen, bei denen es mehr als 3 mögliche Ausgänge einer Partie gibt.

Russell [34] behandelt im ersten Teil seiner Dissertation den komplexeren Fall von Eliminationsproblemen in der NHL (nordamerikanische Eishockey-Liga).

Ziel der Arbeit ist es einen Überblick über (einen Teil) der betrachteten Fragestellungen und erzielten Ergebnisse zu geben. Je nachdem ob die Arbeit eher theoretisch oder eher praktisch ausgerichtet wird, soll für ein ausgewähltes Teilproblem ein effizienter Algorithmus implementiert und getestet werden. Details können individuell je nach persönlichen Präferenzen abgesprachen werden.

Literatur

- [1] I. Adler, A. L. Erera, D. S. Hochbaum, E. V. Olinick, Baseball, optimization, and the world wide web, *Interfaces* **32**, 2002, 12-22.
- [2] N. Baumann, E. Köhler, Approximating earliest arrival flows with flow-dependent transit times, *Discrete Applied Mathematics* **155**, 2007, 161-171.
- [3] N. Baumann, M. Skutella, Solving evacuation problems efficiently: Earliest arrival flows with multiple sources, *Mathematics of Operations Research* **34**, 2009, 499-512.
- [4] B. Beheshti, O.A. Prokopyev, E.L. Pasiliao, *Computational Optimization and Applications*, in press, published online 2015.
- [5] B. Behesti, Efficient resource allocation in a bilevel hierarchy with knapsack and assignment lower-level problems, Ph.D. thesis, University of Pittsburgh, 2015.
- [6] T. Bernholt, A. Gülich, T. Hofmeister, N. Schmitt, Football elimination is hard to decide under the 3-point-rule, in: Mathematical Foundations of Computer Science 1999, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 1672, Springer, Berlin, 1999, pp. 410-418.
- [7] P. Butkovic, R.A. Cuninghame-Green, An $O(n^2)$ algorithm for the maximum cycle mean of an nn bivalent matrix, *Discrete Applied Mathematics* **35(2)**, 1992, 157-162.
- [8] A. Caprara, M. Carvalho, A. Lodi, G.J. Woeginger, A study on the computational complexity of the bilevel knapsack problem, *SIAM Journal on Optimization* **24**, 2014, 823-838.
- [9] A. Caprara, M. Carvalho, A. Lodi, G.J. Woeginger, Bilevel knapsack with interdiction constraints, *INFORMS Journal on Computing* **28**, 2016, 1-15.
- [10] K. Chatterjee, M. Henzinger, S. Krinninger, V. Loitzenbauer, Approximating the minimum cycle mean, *Theoretical Computer Science* **547**, 2014, 104-116.
- [11] L.K. Fleischer, Faster algorithms for the quickest transshipment problem, *SIAM Journal on Optimization* **12**, 2001, 18-35.

- [12] L.K. Fleischer, E. Tardos, Efficient continuous-time dynamic network flow algorithms, *Operations Research Letters* **23**, 1998, 71-80.
- [13] L.K. Fleischer, M. Skutella, Quickest flows over time, *SIAM Journal on Computing* **36**, 2007, 1600-1630.
- [14] D. Gale, Transient flows in networks, *Michigan Mathematical Journal* **6**, 1959, 59-63.
- [15] G. Gallo, M. D. Grigoriadis, R. E. Tarjan, A fast parametric maximum flow algorithm and applications, *SIAM Journal on Computing* **18**, 1989, 30–55.
- [16] E. Gassner, B. Klinz The computational complexity of bilevel assignment problems, *4OR: A Quarterly Journal of Operational Research* **7**, 2009, 379–394.
- [17] F. Granot, S.T. McCormick, M. Queyranne, F. Tardella, Structural and algorithmic properties for parametric minimum cuts, *Mathematical Programming, Series A*, **135**, 2012, 337–367.
- [18] D. Gusfield, C. Martel, A fast algorithm for the generalized parametric minimum cut problem and applications, *Algorithmica* **7**, 1992, 499–519.
- [19] D. Gusfield, C. Martel, The structure and complexity of sports elimination numbers *Algorithmica*, **32**, 2002, 73–86.
- [20] B. Hajek, R. G. Ogier, Optimal dynamic routing in communication networks with continuous traffic, *Networks* **14**, 4574-87.
- [21] H.W. Hamacher, S.A. Tjandra, Earliest arrival flow model with time dependent capacity for solving evacuation problems. *Pedestrian and Evacuation Dynamics*, 2002, 267-276.
- [22] . Hartmann, J.B. Orlin, Finding minimum cost to time ratio cycles with small integral transit times, *Networks* **23(6)**, 1993, 567-574.
- [23] A. Hoffman, T. Rivlin, When is a team “mathematically” eliminated? In: Princeton Symposium on Mathematical Programming (1967), 1970, pp. 391–401, 1970.
- [24] B. Hoppe, ´. Tardos, Polynomial time algorithms for some evacuation problems, in: *Proceedings of the Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, ACM, 1994.
- [25] R.M. Karp, A characterization of the minimum cycle mean in a digraph, *Discrete Mathematics* **23(3)**, 1978, 309-311.
- [26] R.M. Karp, J.B. Orlin, Parametric shortest path algorithms with an application to cyclic staffing, *Discrete Applied Mathematics* **3**, 1981, 37–45, 1981.
- [27] J.B. Orlin, R.K. Ahuja, New scaling algorithms for the assignment and minimum mean cycle problems, *Mathematical Programming* **54(1-3)**, 1992, 41-56.
- [28] W. Kern, D. Paulusma, The computational complexity of the elimination problem in generalized sports competitions, *Discrete Optimization*, **1**, 2004, 205–214.
- [29] E.L. Lawler, Optimal cycles in doubly weighted linear graphs, in: *Theory of Graphs*, P. Rosenstiehl, ed., Dunod, Paris and Gordon and Breach, New York, 1967, pp. 209–214.
- [30] S. T. McCormick, Fast algorithms for parametric scheduling come from extensions to parametric maximum flow.
- [31] S. Thomas McCormick, Approximate binary search algorithms for mean cuts and cycles, *Operations Research Letters* **14(3)**, 1993, 129-132.

- [32] E. Minieka, Maximal, lexicographic, and dynamic network flows, *Operations Research* **21**, 1973, 517-527.
- [33] C.C. Ribeiro, S. Urrutia, OR on the ball: applications in sports scheduling and management, *OR/MS Today* **31**, 2004, 50-54.
- [34] T.C. Russell, A Computational Study of Problems in Sports, Ph.D. thesis, University of Waterloo, 2010.
- [35] S. Ruzika, H. Sperber, M. Steiner, Earliest arrival flows on series-parallel graphs *Networks* **57**, 2011, 169-173.
- [36] M. Schmidt, M. Skutella, Earliest arrival flows in networks with multiple sinks, *Discrete Applied Mathematics*, 2011.
- [37] B. Schwartz, Possible winners in partially completed tournaments, *SIAM Review* **8**, 1966, 302–308.
- [38] C. Smith, C.P. Gomes, C.Fernndez, Streamlining local search for spatially balanced Latin squares, In: *Proceedings of the IJCAI'05*, 2005, pp. 1539-1540.
- [39] S. Tjandra, Dynamic network optimization with application to the evacuation problem, Ph.D. thesis, Universität Kaiserslautern, Shaker Verlag, Aachen, Germany.
- [40] K. Wayne, A new property and faster algorithm for baseball elimination. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **14**, 2001, 223–229.
- [41] N.E. Young, R.E. Tarjan, J.B. Orlin, Faster parametric shortest path and minimum-balance algorithms, *Networks* **21(2)**, 205-221,