Analysis T1, SS2019

2. Übungsblatt, für die Übung am 4.4.2019

---

1. Beweisen Sie direkt mithilfe der Definition des Grenzwertes, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1.$$

2. Beweisen Sie direkt mithilfe der Definition des Grenzwertes, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

3. Verwenden Sie die Rechenregeln für Grenzwerte, um folgende Grenzwerte zu bestimmen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-1}{3n^2-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{7n^5+2n^2}{n^5+n^4-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{3n^3-n^2}.$$

4. Verwenden Sie die Rechenregeln für Grenzwerte, um folgende Grenzwerte zu bestimmen:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+n}{n^2+1} \cdot \frac{n+1}{4n-1}\right), \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$$

5. Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 0$ sowie

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2}, \qquad n \geq 0.$$

   Zeigen Sie, dass die Folge monoton und beschränkt ist. Bestimmen Sie den Grenzwert.

6. Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 0$ und $a_1 = 2$, sowie

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{3} + \frac{2a_n}{3}, \qquad n \geq 0.$$

   Erklären Sie (ausführlich!), warum die Folge konvergent ist. Bestimmen Sie den Grenzwert.