Analysis T1, SS2019

5. Übungsblatt, für die Übung am 16.5.2019

---

1. Stetigkeit mit Konvergenz von Folgen: Zeigen Sie dass für die folgenden Funktionen, und für jeden Wert x_0 im Definitionsbereich, gilt: für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
$$a) \qquad f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 1, \qquad \text{Definitionsbereich} = \mathbb{R}$$
$$b) \qquad f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}, \qquad \text{Definitionsbereich} = (0,\infty).$$

2. Stetigkeit mit ε–δ–Kriterium: Geben Sie für die folgenden Funktionen für jeden Wert x_0 im Definitionsbereich, und für jedes $\varepsilon > 0$ einen Wert von $\delta > 0$ an so dass aus $|x-x_0| < \delta$ immer folgt dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
$$a) \qquad f(x) = \frac{1}{x}, \qquad \text{Definitionsbereich} = (0,\infty).$$
$$b) \qquad f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \qquad \text{Definitionsbereich} = \mathbb{R}.$$

3. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} nx^n.$$

4. Beweisen Sie: Sei $f: \ [a,b] \mapsto [a,b]$ eine stetige Funktion, wobei $a,b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Dann gibt es eine Zahl $x \in [a,b]$ für die gilt $f(x) = x$. (Der Wert x heißt "Fixpunkt" der Funktion f.) Beweisen Sie auch dass die Aussage falsch sein kann, wenn man nicht annimmt dass die Funktion f stetig ist.

5. Verwenden Sie die Definitionen der Sinus- und Cosinus-Funktion mithilfe der komplexen Exponentialfunktion, um die folgenden Gleichungen zu beweisen:
$$a) \qquad (\sin x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2},$$
$$b) \qquad (\cos x)^2 = \frac{1+\cos(2x)}{2},$$
$$c) \qquad (\sin x)(\cos y) = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}.$$

6. Komplexes Wurzelziehen[1]. Bestimmen Sie alle komplexen Quadratwurzeln der Zahl i, das heißt, alle komplexen Zahlen $z = x + iy$ für die gilt $z^2 = i$. Führen Sie eine Probe durch. Bestimmen Sie ebenso alle komplexen achten Wurzeln der Zahl 64, d.h. alle komplexen Zahlen $z = x + iy$ für die gilt $z^8 = 64$.

[1] Wurde nicht in der Vorlesung durchgenommen, müssen Sie sich anhand von Kapitel 3.4.4 im Skriptum selbst beibringen.