

Analysis T2 Übung

10. Übungsblatt

Für alle Beispiele: Lösen Sie das Anfangswertproblem mithilfe der Laplace-Transformation. Verwenden Sie nach Gutdünken Partialbruchzerlegung oder Residuenkalkül. Geben Sie die Lösung als reelle Funktion (also mit Sinus und Cosinus, und nicht mit komplexen Exponentialfunktionen) an.

1.

$$y'(x) + y(x) = 5 \sin(2x), \quad y(0) = 2.$$

2.

$$y''(x) - 6y'(x) + 5y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3.$$

3.

$$y'(x) + 2y(x) = 2x - 4, \quad y(0) = 1.$$

4.

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 3xe^{-x}, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2.$$

5. Erlernen Sie, was die Dirac-Distribution und die Heaviside-Funktion bzw. deren Laplace-Transformierte sind. Lösen Sie dann folgendes Anfangswertproblem. Machen Sie eine Skizze der Lösung. Die Differentialgleichung beschreibt den Ausschlag eines gedämpften Pendels, das zum Zeitpunkt $x = 1$ einen Schlag (Impuls) in Einheitsstärke erhält.

$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = \delta(x - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Hier bezeichnet δ die Dirac-Distribution (auch Dirac-Deltafunktion genannt - aus streng mathematischer Sicht handelt es sich aber um keine Funktion). Beachten Sie, dass man das Beispiel mit den "gewöhnlichen" Methoden (charakteristische Gleichung, inhomogener Ansatz usw.) nicht lösen könnte.