Analysis T2 Übung

3. Übungsblatt

---

1. Berechnen Sie das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\begin{pmatrix} 2xy - x^2 \\ x + y^2 \end{pmatrix}$ entlang der Kurve $\gamma : \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, vom Punkt $(0,0)$ bis zum Punkt $(1,1)$. Berechnen Sie dasselbe Kurvenintegral entlang der Kurve $\eta : \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, die ebenfalls vom Punkt $(0,0)$ bis zum Punkt $(1,1)$ führt. Machen Sie eine Skizze. Ist das Feld ein Gradientenfeld?

2. Ein ebenes Vektorfeld
$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$
ist ein Gradientenfeld, genau dann wenn es eine Potentialfunktion $\phi(x,y)$ gibt so dass $\partial\phi/\partial x = P$ und $\partial\phi/\partial y = Q$ ist. Bestimmen Sie die Potenzialfunktion des Vektorfeldes
$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x^2 + x + 1 \end{pmatrix}.$$
Erklären Sie wie Sie zu Ihrem Ergebnis gekommen sind.

3. Berechnen Sie den Fluss (in Richtung der positiven x-Achse) des Vektorfeldes
$$\vec{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3y^2 z \\ -x^3 z \\ xyz^8 \end{pmatrix}$$
durch eine in der Ebene $x = 0$ liegende rechteckige Fläche mit Eckpunkten
$$(0,1,0), (0,1,2), (0,2,0), (0,2,2).$$
Machen Sie eine Skizze.

4. Berechnen Sie den Fluss (in Richtung der positiven y-Achse) des Vektorfeldes
$$\vec{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 z \\ x^2 + y + z \\ -xz \end{pmatrix}$$
durch eine in der Ebene $y = 0$ liegende Kreisfläche mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und Radius 2. Machen Sie eine Skizze.

5. Berechnen Sie den Fluss (in Richtung der positiven z-Achse) des Vektorfeldes

$$\vec{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

durch die Fläche $F: \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2=1, \ z \geq 0\}$. Machen Sie eine Skizze.