Analysis T2 Übung

7. Übungsblatt

---

1. Teilen Sie die folgenden komplexen Funktionen in Real- und Imaginärteil, und überprüfen Sie die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen.

$$a) \quad f(z) = z^3, \qquad\qquad b) \quad f(z) = \frac{1}{z}, \quad \text{für } z \neq 0.$$

2. Sei γ eine Kurve in der komplexen Ebene, die in gerader Linie vom Punkt 0 zum Punkt $1 + 2i$ führt. Sei $f(z) = z^3$. Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\ dz$, indem Sie die Formel auf Seite 56 im Skriptum (zweite Formel von oben) verwenden um das Kurvenintegral in zwei reelle ebene Kurvenintegrale umzuschreiben, und diese beide ausrechnen.

3. Wie Beispiel 2, nur dass Sie die Kurve direkt komplex parametrisieren und das Kurvenintgral als
$$\int_\gamma f(z(t))\dot{z}(t)\ dt$$
ausrechnen.

4. Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\ dz$ für $f(z) = |z|$ und für die Kurve $\gamma:\ z(t) = te^{2\pi i t},\ 0 \leq t \leq 1$. Machen Sie eine Skizze der Kurve.

5. Sei γ jene Kurve in der komplexen Ebene, die vom Punkt 1 startend einmal im Abstand 1 um den Nullpunkt läuft (komplexer Einheitskreis, einmal in mathematisch positive Richtung durchlaufen). Berechnen Sie, indem Sie die Kurve parametrisieren und das Kurvenintegral ausrechnen, den Wert des Kurvenintegrals $\int_\gamma f(z)dz$ für folgende Funktionen $f(z)$:

$$a) \quad f(z) = z, \qquad b) \quad f(z) = z^2, \qquad c) \quad f(z) = \frac{1}{z}, \qquad d) \quad f(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Was unterscheidet Fall c) von den anderen Fällen?