Analysis T2 Übung

9. Übungsblatt

---

1. Berechnen Sie mithilfe des Residuenkalküls den Wert des komplexen Kurvenintegrals $\int_C f(z)dz$. Dabei ist C ein Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 4 (einmal in positiver Richtung durchlaufen), und

$$f(z) = \frac{12z^2 + 12}{z^3 + 7z^2 + 7z - 15}.$$

Hinweis: Eine Nullstelle des Nenners liegt bei $z = 1$ (um die anderen zu finden machen Sie eine Polynomdivision). Machen Sie eine Skizze.

2. Berechnen Sie mithilfe des Residuenkalküls den Wert des komplexen Kurvenintegrals $\int_C f(z)dz$. Dabei ist C ein Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 2 (einmal in positiver Richtung durchlaufen), und

$$f(z) = \frac{z^2 + 4z - 1}{z^3 + 5z^2 + 7z + 3}.$$

Hinweis: Eine Nullstelle des Nenners liegt bei $z = -3$. Machen Sie eine Skizze.

3. Berechnen Sie mithilfe des Residuenkalküls den Wert des komplexen Kurvenintegrals $\int_C f(z)dz$. Dabei ist C die Kurve $C: \ z(t) = 2i + 4e^{it}, \ 0 \le t \le 2\pi$, und

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4 - 2z^3 - 11z^2 + 12z + 36}.$$

Hinweis: die Nullstellen des Nenners liegen bei $z = 3$ und $z = -2$. Machen Sie eine Skizze.

4. Erlernen Sie Anhand der Beispiele 40 und 41 sowie Bemerkung 27 im Skriptum, wie man uneigentliche reelle Integrale mit Residuenkalkül bestimmt, und berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 4} \, dx.$$

5. Sei $u(x, y) = e^y \cos x - 2xy$. Überprüfen Sie, dass u harmonisch ist, und bestimmen Sie die dazugehörige konjugiert harmonische Funktion, so dass $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorph ist. Als Bonus (nicht verpflichtend): stellen Sie $f(z)$ als Funktion der komplexen Variablen z dar.