Die Bearbeitung dieses Übungsblatts ist freiwillig (aber empfohlen).

1. Es sei
$$V(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 \\ xz \\ ye^x \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie $\iint_{\partial K} V \, d\mathbf{o}$, wobei K die Kugel um den Ursprung mit Radius 2 ist.

2. Es sei
$$V(x,y,z) := \begin{pmatrix} 2z + \frac{y^2}{2} \\ xy \\ y + 2x \end{pmatrix}, \qquad \gamma(t) := \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$
Bestimmen Sie $\int_\gamma V \, d\mathbf{x}$.

3. Sei γ die Kurve, die in $(0,0)$ beginnt, auf geradem Weg den Punkt $(2,1)$ erreicht, dann gegen den Uhrzeigersinn über einen Kreisbogen mit Mittelpunkt $(1,1)$ zum Punkt $(0,1)$ weiterführt und schließlich wieder auf geradem Weg den Punkt $(0,0)$ erreicht. Weiters sei
$$V(x,y) := \begin{pmatrix} 3x^2y \\ x^3y + \sin(y) \end{pmatrix}.$$
   (a) Berechnen Sie $\int_\gamma V \, d\mathbf{x}$.
   (b) Sei nun
   $$\gamma_2(t) := \begin{pmatrix} (t+1)^2 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$
   Berechnen Sie $\int_{\gamma_2} V \, d\mathbf{x}$.

4. Sei
$$V(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$
und γ sei der Kreis um $(0,0)$ mit Radius 1. Bestimmen Sie $\int_\gamma V \, d\mathbf{x}$. (Bsp. 15 aus dem Skript). Was macht hier Probleme? Vergleichen Sie diese Aufgabe mit Aufgabe 2.

5. Stellen Sie fest, welches dieser Vektorfelder ein Gradientenfeld ist und berechnen Sie gegebenenfalls das Potenzial
$$a) \begin{pmatrix} 2xy^2 + 1 \\ 2x^2y + 1 \end{pmatrix}, \qquad b) \begin{pmatrix} 2xy^2 + x \\ 2x^2y + x \end{pmatrix}, \qquad c) \begin{pmatrix} e^{x+y}\cos(x) + e^{x+y}\sin(x) \\ e^{x+y}\sin(x) \end{pmatrix}$$