Die Bearbeitung dieses Übungsblatts ist freiwillig (aber empfohlen).

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y^{(3)}(x) - 6y'' + 11y' - 6y = 5x^2 + 5x.$$
Bestimmen Sie ausserdem die spezielle Lösung für das Anfangswertproblem $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y''(x) + 2y' + 10y = e^{-x}\cos(x) - 5e^{-x}\sin(3x).$$

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$2y''(x) + 4y' + 4y = -10\sin(2x)$$
Bestimmen Sie ausserdem die spezielle Lösung für das Anfangswertproblem $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4. Berechnen Sie die komplexen Kurvenintegrale
   (a) $\int_\gamma |z|\, dz$ für $\gamma : z(t) = te^{2\pi it}$ mit $0 \leq t \leq 1$.
   (b) $\int_\gamma e^z\, dz$ für $\gamma : z(t) = t + it^2$ mit $0 \leq t \leq 1$.

5. Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral
$$\int_\gamma \frac{1}{z^2} \qquad \gamma : z(t) = e^{2\pi it}, 0 \leq t \leq 1$$
direkt, indem Sie die angegebene Parametrisierung verwenden.

6. Zeigen Sie, dass die Funktion $u(x, y) := e^{3x}\sin(3y) + xy$ harmonisch ist und bestimmen Sie $v(x, y)$, sodass $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorph ist.[1]

7. Berechnen Sie das Kurvenintegral
$$\int_C \frac{4z^2 - 3z + 11}{(z + 3)(4z^2 + 1)}\, dz,$$
wobei C den komplexe Einheitskreis, einmal gegen den Uhrzeigersinn umlaufen, bezeichnet.

8. Berechnen Sie das Kurvenintegral
$$\int_C \tan(\pi z)\, dz,$$
wobei C den komplexe Einheitskreis, einmal gegen den Uhrzeigersinn umlaufen, bezeichnet.

9. Bestimmen Sie die Residuen folgender Funktionen bei ihren Singularitäten
$$a) f(z) = \frac{\sin(z)}{(z + 2)^4} \quad b) f(z) = \frac{z^2e^z + e^z}{z^3 - z^2 + z - 1} \quad c) \frac{(z + 3)^2(z - 4)}{(z^2 - 16)^3(z - 5)^3}.$$

[1] Ursprünglich stand in der Angabe $u(x, y) := e^{3x}\sin(3y) + \cos(\sqrt{2}x)y^2$, aber das ist keine harmonische Funktion. Am 14.6. geändert. C.A.