# Komplexe Analysis Übungen

1. Übungsblatt

---

1. Berechnen Sie das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\begin{pmatrix} 2xy - x^2 \\ x + y^2 \end{pmatrix}$ entlang der Kurve $\gamma : \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, vom Punkt $(0,0)$ bis zum Punkt $(1,1)$. Berechnen Sie dasselbe Kurvenintegral entlang der Kurve $\eta : \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, ebenfalls vom Punkt $(0,0)$ bis zum Punkt $(1,1)$. Ist das Feld ein Gradientenfeld?

2. Überprüfen Sie den Satz von Green–Riemann für das Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ 2y - x \end{pmatrix}$ und für den Bereich $B$, wobei $B$ eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt im Ursprung und mit Radius 2 ist.

3. Bestimmen Sie welches dieses Vektorfelder ein Gradientenfeld ist, und berechnen Sie gegebenenfalls das Potenzial.

   $a)$ $\begin{pmatrix} 4x^3y \\ x^4 \end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} \cos y \\ -x \sin y \end{pmatrix}$, $c)$ $\begin{pmatrix} xe^y \\ ye^x \end{pmatrix}$, $d)$ $\begin{pmatrix} 2 \sin x \cos x \cos y \\ -\sin^2 x \sin y \end{pmatrix}$.

4. Berechnen Sie
   $$\int_\gamma (-y^2 \sin(\pi x))\ dx + \left( \frac{2y \cos(\pi x)}{\pi} \right)\ dy$$
   für den Integrationsweg
   $$\gamma : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin^2 t \\ e^t \cos t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le \pi/2.$$
   (Hinweis: Verwenden Sie das zugehörige Potenzial.)