Komplexe Analysis Übungen

9. Übungsblatt

1. Zeigen Sie folgende Verschärfung des Riemannschen Abbildungssatzes: Sei $G \neq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, und $z_0 \in G$. Dann gibt es genau eine biholomorphe Abbildung $f : G \mapsto E$ mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$.

2. Zeigen Sie, dass alle Automorphismen (biholomorphe Abbildungen auf sich selbst) der Einheitskreisscheibe von der Form

$$w(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

   für ein $\theta \in \mathbb{R}$ und ein $z_0 \in E$ sind. (Wenn Sie viel Zeit haben: diese Automorphismen bilden eine Gruppe. Weil E und die obere Halbebene $\mathbb{H}$ durch die Funktion $\psi(z) = i\frac{1-z}{1+z}$ konform äquivalent sind, können Sie auch alle Automorphismen der oberen Halbebene bestimmen – diese sind Möbius-Transformationen von einer sehr speziellen Form. Zeigen Sie dass beide Automorphismengruppen isomorph zu $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ sind. Dabei ist $PSL(2, \mathbb{R})$ die *projective special linear group*, also die *special linear group* $SL(2, \mathbb{R})$ der 2×2-Matrizen mit Determinante 1, faktorisiert nach $\{\pm I\}$ mit der Notation I für die Einheitsmatrix. Wenn Sie sehr viel Zeit haben, lesen Sie auch noch den Wikipedia-Artikel zum Stichwort "Lie-Gruppe").

3. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz ist der Kreissektor

$$\{re^{i\phi} :\ 0 < \phi < \frac{\pi}{8},\ 0 < r < 1\}$$

   biholomorph auf E abbildbar. Geben Sie so eine Abbildung explizit an.

4. Nach dem Satz von Liouville ist die komplexe Ebene nicht konform äquivalent zur Einheitskreisscheibe. Ist sie überhaupt nur zu sich selbst konform äquivalent? Gibt es außer $\mathbb{C}$ noch andere Gebiete, die zu keinem einzigen Teilgebiet von E konform äquivalent sind?