

# Komplexe Analysis Übungen

## 3. Übungsblatt

---

1. Zeigen Sie dass der Wert eines komplexen Kurvenintegrals nicht von der Parametrisierung abhängt.
2. Sei  $f$  holomorph auf  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ . Weiters gelte  $f(z_0) = 0$  und  $f'(z_0) \neq 0$ . Folgern Sie daraus dass für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  gilt:

$$\int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{1}{f(z)} dz = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}.$$

3. Sei  $f$  eine ganze nicht-konstante Funktion. Zeigen Sie dass die Bildmenge von  $f$  dicht in  $\mathbb{C}$  liegt. (Hinweis: Das ist eine stärkere Aussage als im Satz von Liouville – dort wird nur behauptet dass die Bildmenge von  $f$  nicht beschränkt ist.)
4. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $r$  und  $c$  zwei positive reelle Zahlen. Sei  $f$  eine ganze Funktion, und es gelte die Ungleichung  $|f(z)| \leq c|z|^n$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \geq r$ . Zeigen Sie, dass  $f$  ein Polynom ist, und zwar ein Polynom von Grad höchstens  $n$ .