Komplexe Analysis Übungen

8. Übungsblatt

1. Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ reell-linear unabhängig und f eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe nichtkonstante doppelt periodische Funktion mit Perioden ω_1 und ω_2 (das heißt $f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$ für alle z). Zeigen Sie dass f auf dem sogenannten Fundamentalbereich $F = \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 : \ 0 \le \lambda_1, \lambda_2 < 1\}$ gleich viele Polstellen wie Nullstellen besitzt (mit Vielfachheiten gezählt).

2. Sei G ein beschränktes Gebiet, und sei $\overline{G}$ dessen Abschluss. Auf $\overline{G}$ sei eine Folge stetiger Funktionen $(f_n)_{n\geq 1}$ gegeben, die auf G sogar holomorph sind. Außerdem sei die Funktionenfolge auf $\overline{G}\backslash G$ gleichmäßig konvergent. Zeigen Sie dass die Folge auf ganz $\overline{G}$ gleichmäßig konvergent ist.

3. Zeigen Sie dass für $\mathrm{Re}\, z > 1$ durch

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

eine holomorphe Funktion gegeben ist, und geben Sie eine Reihendarstellung für $\zeta'(z)$ an.

4. Wir wissen, dass unter kompakter Konvergenz die Blätterzahl nicht steigen kann. Zeigen Sie dass sich die Blätterzahl aber reduzieren kann: Geben Sie für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \infty$ eine auf der komplexen Einheitskreisschreibe kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen mit nichtkonstanter Grenzfunktion an, so dass dort jede Funktion der Folge exakt k Nullstellen (mit Vielfachheiten), die Grenzfunktion aber keine einzige Nullstelle hat.