

# Komplexe Analysis Übungen

## 9. Übungsblatt

---

1. Leiten Sie aus der Partialbruchzerlegung von  $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$  her dass

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

ist (im Sinne kompakter Konvergenz auf  $\mathbb{C}$ ).

2. Seien  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  reell-linear unabhängig. Zeigen Sie dass es bis auf Addition einer Konstanten genau eine doppelt periodische Funktion mit den Perioden  $\omega_1$  und  $\omega_2$  gibt, die außer dem Pol bei 0 mit dem Hauptteil  $1/z^2$  keinen weiteren Pol im Fundamentalbereich besitzt. (Lesen Sie dazu auch den Wikipedia-Artikel zum Stichwort "Elliptische Funktion".)
3. Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge wie im Weierstraßschen Produktsatz. Seien  $(c_n)_{n \geq 1}$  und  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$  Folgen positiver Zahlen so dass  $\sum c_n < \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n |a_n| = \infty$ . Zeigen Sie: Wenn man im Beweis des Satzes von Weierstraß die  $m_n$  so wählt dass

$$\left| \ln(1 - z) + z + z^2/2 + \cdots + z^{m_n}/m_n \right| < c_n \quad \text{für alle } z \text{ für die } |z| < \varepsilon_n,$$

dann konvergiert die so konstruierte Folge der Teilprodukte wie gewünscht, im Sinn kompakter Konvergenz auf ganz  $\mathbb{C}$ .

4. Konstruieren Sie eine ganze Funktion mit einfachen Nullstellen genau bei den ganzen Zahlen. Als konvergenzerzeugenden Faktor bei der Nullstelle  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  kann man  $e^{z/m}$  wählen. Den Beitrag der Nullstelle  $m$  und der Nullstelle  $-m$  kann man kombinieren, um die Formel deutlich zu vereinfachen. Verwenden Sie (meinetwegen unbewiesen) die Schlussfolgerung von Aufgabe 4 aus Kapitel 9 im Buch von Jänich, und die Bemerkung zu Aufgabe 5, um zu zeigen dass die so konstruierte Funktion die Funktion  $\sin \pi z$  ist und dass daher

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

Achten Sie auf eventuelle Konvergenzprobleme!

Verwenden Sie die Hinweise zu den Beispielen im Buch von Jänich, Kap. 9 (sonst wird es schwierig). Für Bsp. 1 dieses Blattes können Sie die Schlussfolgerung von Bsp. 4 Kap. 8 des Buchs verwenden.