21. a) Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive relle Zahlen. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion dass

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

    b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion dass $5^n \geq n^2$ für $n \geq 1$.

22. a) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$ für folgende Folgen:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4 + \sin n}{n}, \quad n \geq 1, \\
a_n &= \frac{7n^2 - 2}{2n^2 - n + 2}, \quad n \geq 1, \\
a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}, \quad n \geq 1, \\
a_n &= \left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(2 + \frac{3}{n^2}\right), \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

    b) Verwenden Sie die Definition des Grenzwertes, um direkt zu beweisen dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9 + (-1)^n}{\sqrt{n}} = 0.$$

23. Beweisen Sie dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{2}{n^2} + (-1)^n$ keinen Grenzwert besitzt.

24. a) Bestimmen Sie ob diese Reihen konvergent oder divergent sind.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 2}{11n^4 - n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n (n!)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - i)^n}{3^n}$$

25. a) Beweisen Sie dass es eine relle Zahl x gibt für die gilt:

$$\cos x = 4x.$$

    b) Welche dieser Funktionen ist injektiv/surjektiv/bijektiv? Warum?

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2, \qquad f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}. \\
f(x) &= 2 + x, \qquad f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}. \\
f(x) &= 1, \qquad f: \mathbb{R} \mapsto \{1\}.
\end{aligned}$$

(Hinweis: das sind die Beispiele aus dem Angabeblatt von Gruppe A für die 1. Klausur. Gruppe B war ganz ähnlich, nur teilweise in anderer Reihenfolge, mit anderen Variablennamen und mit anderen Zahlenwerten.)