Analysis I 1

Klausur, Guppe B / Übungsblatt 6

Punktevergabe nur vorläufig!

1 a) z.Z. $4^n \geq n^2 \quad \forall n \geq 1$

IA: $4^1 \geq 1$ ✓ I

$n \to n+1$: $4^{n+1} = 4 \cdot 4^n \overset{\text{Ind V.}}{\geq} 4n^2 \overset{(*)}{\geq} (n+1)^2$

(*) denn: $4n^2 - (n+1)^2 = 3n^2 - 2n + 1$ I

$= \underbrace{2n^2}_{\geq 0} + \underbrace{(n-1)^2}_{\geq 0} \geq 0$ □

b) z.Z. $\forall b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{R}^+$

$(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_n}\right)$

IA: $n=1$: $b_1 \cdot \frac{1}{b_1} = 1 \quad \forall b_1 \in \mathbb{R}^+$ ✓ I

wir machen den Fall $n \to n+1$:

$(b_1 + b_2 + \ldots + b_{n+1})\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_{n+1}}\right)$

$= (b_1 + \ldots + b_n)\left(\frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{1}{b_n}\right) + (b_1 + \ldots + b_n) \cdot \frac{1}{b_{n+1}}$

$+ b_{n+1}\left(\frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{1}{b_n}\right) + b_{n+1} \cdot \frac{1}{b_{n+1}}$

I $\overset{IV}{\geq} n^2 + \frac{1}{b_{n+1}}(b_1 + \ldots + b_n) + b_{n+1}\left(\frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{1}{b_n}\right) + 1 \quad (*)$

hier wird $b_i > 0$ benötigt!

Beachte, dass gilt

$$\frac{b_1}{b_{n+1}} + \frac{b_{n+1}}{b_1} = \frac{b_1^2 + b_{n+1}^2}{b_{n+1} b_1} \geq 2 \quad , \text{ denn}$$

1 !

muss erwähnt werden!!

$$b_1^2 + b_{n+1}^2 \geq 2\, b_1 b_{n+1} \quad (\text{Binom. Formel})$$

Es gibt n solcher Terme, also folgt

$$\frac{1}{b_{n+1}} (b_1 + \dots + b_n) + b_{n+1}\left(\frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}\right) \geq 2n$$

$$\Rightarrow \circledast \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \quad \square$$ 1

2

a)

wegen $-1 \leq \cos x \leq 1$ gilt

$$\frac{1}{n} \leq \frac{2+\cos n}{n} \leq \frac{3}{n}$$

da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\cos n}{n} = 0$ 1

„Einzwicksatz"

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+2}{3n^2-2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{9\overbrace{\frac{n^2}{n^2}}^{=1} + \overbrace{\frac{2}{n^2}}^{\to 0}}{3\underbrace{\frac{n^2}{n^2}}_{=1} - \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}$$

$$= \frac{9}{3} = \underline{\underline{3}}$$ 1

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n}\right)^{3n}$$

$$\overset{m:=3n}{=} \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{3}{m}\right)^m = e^3$$ 1

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 + \underbrace{\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^3}}_{\to 0} = 2$$

1

b) Sei $\varepsilon > 0$. Es ist zu zeigen, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\left|\frac{7+(-1)^n}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N$

↑ oder „>" ist egal.

$$\left|\frac{7+(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{7+(-1)^n}{\sqrt{n}} \leq \frac{8}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{8}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff n > \left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^2 \Rightarrow \text{wähle } N = \frac{64}{\varepsilon^2}+1$$

$\square$

b, c jeweils 0,5 P wenn erkannt wurde, was zu tun ist (Def. GW) und 1 P f. Ergebnis/Lsg

c) mehrere Möglichkeiten:

Variante 1: Zeige, dass b_n mehrere Häufungspunkte hat.

Für die Teilfolge mit geraden Indizes gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} + (-1)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} + 1 = 1$$

Für die ungeraden Indizes gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} + (-1)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} - 1 = -1$$

$\Rightarrow b_n$ hat zwei verschiedene Häufungspunkte.

$\overset{VL}{\Rightarrow} b_n$ kann keinen GW besitzen.

Variante 2: Zeige, dass b_n keine Cauchy Folge ist.

$$|b_n - b_{n+1}| = \left|\frac{1}{n} + (-1)^n - \frac{1}{n+1} - (-1)^{n+1}\right|$$

$$= \left|\frac{n+1-n}{n(n+1)} + (-1)^n\left(1-(-1)\right)\right| = \left|\frac{1}{n(n+1)} + 2(-1)^n\right|$$

inv. Δ-Ungl.

$$\geq \left|2(-1)^n\right| - \frac{1}{n(n+1)}. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |b_n - b_{n+1}| = 2 \neq 0$$

$\square$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+4}{13n^4-2n}$

QK: $\left| \frac{\frac{5(n+1)^2+4}{13(n+1)^4-2(n+1)}}{\frac{5n^2+4}{13n^4-2n}} \right| = \left| \frac{(5n^2+10n+9)(13n^4-2n)}{(13(n^4+4n^3+6n^2+4n+1)-2(n+1))(5n^2+4)} \right|$

$= \left| \frac{65n^6+\ldots}{65n^6+\ldots} \right| \longrightarrow 1 \Rightarrow$ bringt nichts!

besser: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+4}{13n^4-2n} \overset{*}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+4n^2}{13n^4-2n^4} = \frac{9}{11}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

d.h. die Reihe ist konvergent. (1)

Anm.: $*$ gilt, weil Zähler u. Nenner immer strikt positiv sind und $4n^2 \geq 4 \ \forall n$ und $2n^4 \geq 2n \ \forall n$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ kann nicht konvergieren, da $(-1)^n$ keine Nullfolge ist (Trivial Kriterium) (1)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ siehe Aufg 11 c, Blatt 3

Qk: $\left| \frac{\frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}} \right| = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)! \, 2^n \, n! \, n!}{2^{n+1}(n+1)(n+1) \, n! \, n! \, (2n)!}$

$= \frac{4n^2+6n+2}{2n^2+4n+2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2$ (1)

$\Rightarrow$ die Reihe divergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n} \quad QK: \left| \frac{\frac{(1+i)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{(1+i)^n}{2^n}} \right| = \left| \frac{(1+i)}{2} \right|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

$\Rightarrow$ die Reihe Konvergiert 1

b)

z.z. $\exists x \in \mathbb{R}: \cos x = 2x$

definiere die Hilfsfkt. $g(x) = \cos(x) - 2x$

Es gilt: - da $\cos(x)$ und $2x$ stetige fkt. sind, ist $g(x)$ stetig 0,5

$- \; g(0) = \cos(0) - 2\cdot 0 = 1 > 0$

0,5

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\cdot\frac{\pi}{2} = -\pi < 0$

$\Rightarrow$ Nach dem Zwischenwertsatz hat g eine Nullstelle (zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$).

Diese Nst erfüllt die Gleichung $\cos x = 2x$ 1/1 $\square$

0,5 P pro Aufg. falls alles richtig ist

c)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ ist weder injektiv, noch surjektiv

In dieser Teilaufgabe kommt es auf Urbild- u. Bild-Bereich an!

Bew:

$f(-2) = f(2) = 4 \Rightarrow$ nicht injektiv

$\nexists x \in \mathbb{R}: f(x) = x^2 = -33 \Rightarrow$ nicht surjektiv

$f(x) = 1 + x \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

Bew:

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 1 + x_1 = 1 + x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow$ injektiv

sei $y \in \mathbb{R}$ mit $x = y - 1$ gilt

$$f(x) = x + 1 = y - 1 + 1 = y$$

$\Rightarrow$ f ist surjektiv

$f(x) = 0$ $\quad f: \mathbb{R} \to \{0\}$ ist nicht injektiv, aber surjektiv

Bew:

$$f(-\sqrt{2}) = f(\pi) = 0$$

$\Rightarrow$ nicht injektiv

$f(-\sqrt{2}) = 0$ $\Rightarrow$ surjektiv, da 0 einziges Element in $\{0\}$

$\square$