AN Ü-Blatt 2

6) zz: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

Induktionsbasis: $n=1: \quad 1\cdot(1+1) = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot(1+1)(1+2)$

$\Leftrightarrow \quad 2 = \frac{1}{3}\cdot \cancel{6} = 2$ ✓

-voraussetzung: $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

-behauptung: $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{1}{3}\cdot(n+1)(n+2)(n+3)$

-schritt/beweis:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2)$$

$$\overset{IV}{=} \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)$$

$$= \left(\frac{1}{3} n + 1\right)(n+1)(n+2)$$

$$= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3) \quad \text{wzbw.} \ \square$$

---

7) zz: $\forall n \in \mathbb{N}: 6 \mid n^3 - n \Leftrightarrow 6\cdot k = n^3 - n$ f. passendes $k \in \mathbb{N}$

Induktionsbasis: $n=1: \quad n^3 - n = 0 \qquad 6 \mid 0$ ✓

$n=2: \quad 8-2 = 6 \qquad 6 \mid 6$ ✓

Induktionsvoraussetzung: $6 \mid n^3 - n$

Induktionsbehauptung: $6 \mid (n+1)^3 - (n+1)$

Induktionsbeweis: $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 =$

$$= \underbrace{(n^3 - n)}_{6\mid \text{ lt. IV}} + \underbrace{3(n^2+n)}$$

$\Rightarrow$ zz: $6 \mid 3(n^2+n)$

$\Leftrightarrow$ zz: $2 \mid n^2+n$ $\quad$ ($n^2+n = n(n+1)$ ↳ Produkt zweier Aufeinanderfolgender Zahlen ist immer gerade)

F.1: n ungerade: $(2 \nmid n)$

$\Rightarrow 2 \nmid n^2, \quad 2 \nmid n$

$\Rightarrow 2 \mid n^2+n$ $\quad$ (ungerade + ungerade = gerade)

F.2: n gerade $(2 \mid n)$

$\Rightarrow 2 \mid n^2, \quad 2 \mid n$

$\Rightarrow 2 \mid n^2+n$

$\Rightarrow 6 \mid (n+1)^3 - (n+1)$ $\square$

8) zz: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 3:$

$$\prod_{k=3}^{n} \left(1 - \frac{2}{k}\right) = \frac{2}{n(n-1)}$$

Basis: $n = 3$: $\quad 1 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3(2)} = \frac{1}{3}$ ✓

Voraussetzung: $\prod_{k=3}^{n} \left(1 - \frac{2}{k}\right) = \frac{2}{n(n-1)}$

Behauptung: $\prod_{k=3}^{n+1} \left(1 - \frac{2}{k}\right) = \frac{2}{(n+1)n}$

Beweis/Schritt:

$$\prod_{k=3}^{n} \left(1 - \frac{2}{k}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \overset{IV}{=} \frac{2}{n(n-1)} \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=3}^{n+1} \left(1 - \frac{2}{k}\right) = \frac{2}{n(n-1)} - \frac{4}{(n+1)n(n-1)} =$$

$$= \frac{2(n+1) - 4}{(n+1)(n)(n-1)} = \frac{2(n-1)}{(n+1)n(n-1)} = \frac{2}{(n+1)n} \quad \square \text{ wzbw.}$$

---

9) zz.: $\forall\, n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{2^n - 1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

Basis: $n = 1$: $\quad \frac{1}{1} \geq \frac{1}{2}$ ✓

Voraussetzung: $\sum_{k=1}^{2^n - 1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

Behauptung: $\sum_{k=1}^{2^{n+1} - 1} \frac{1}{k} \geq \frac{n+1}{2}$

Schritt: $\sum_{k=1}^{2^n - 1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1} - 1} \frac{1}{k} \overset{IV}{\geq} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1} - 1} \frac{1}{k} \overset{!}{\geq} \frac{n+1}{2}$

$$\Rightarrow \text{zz.}: \sum_{k=2^n}^{2^{n+1} - 1} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1} - 1} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^{n+1} - 1} \cdot 2^n \geq \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{wzzw. } \square$$

10) a) 3 Obstsorten, jeweils > n Stück
kaufe n Stück

k_1 erste Sorte, k_2 zweite Sorte, $n-k_1-k_2$ dritte Sorte

$$\binom{n}{k_1}\cdot\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{n-k_1-k_2} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}$$

$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}$$

$$= \underline{\underline{\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,(n-k_1-k_2)!}}}$$

b) $(x+y+z)^n = ?$

$$= (x+(y+z))^n = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k}\cdot(y+z)^k\binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^{n-k}\sum_{l=0}^{k} y^l z^{k-l}\binom{k}{l}\binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} x^{n-k} y^l z^{k-l}\binom{k}{l}\binom{n}{k}$$

$$\left[\binom{k}{l}\binom{n}{k} = \frac{k!}{l!(k-l)!}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{l!(k-l)!(n-k)!}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} x^{n-k} y^l z^{k-l}\binom{k}{l}\binom{n}{k}$$

$$\overset{n-k=i}{=} \sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-i} x^i y^l z^{n-i-l}\left(\frac{n!}{l!\cdot i!\cdot(n-l-i)!}\right)$$

$$= \sum_{0\le i+l\le n} x^i y^l z^{n-i-l}\left(\frac{n!}{l!\cdot i!(n-l-i)!}\right)$$

Scanned by CamScanner