Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

11. :
(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2}{n^4+1}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$

12. :
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

13. :
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+n}{3^n}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

14. :
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log_2 n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log_2 n)(\log_2 \log_2 n)}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log_2 n)^2}$

15. Für welche rellen Zahlen x ist die folgende Reihe konvergent?
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

11. a) Minorantenkriterium:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}} \to n \geq \sqrt[3]{n^2-1} \to n^3 \geq n^2-1$$

gilt für $n \geq 2$ ✓

→ Die Reihe divergiert

b) Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{5(n+1)^2(n^4+1)}{5n^2((n+1)^4+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{5n^6+\dots}{5n^6+\dots} \right| = 1$$

→ Keine Aussage möglich

... Majorantenkriterium

$$\frac{5n^2}{n^4+1} \leq \frac{5}{n^2} \to \frac{n^2}{n^4+1} \leq \frac{1}{n^2} \to n^4 \leq n^4+1$$ ✓

→ Die Reihe konvergiert

c) Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2(n+1))!\, 2^n (n!)^2}{(2n)!\, 2^{n+1} ((n+1)!)^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(2n)!}(2n+1)(2n+2)\cancel{2^n}\cancel{(n!)}\cancel{(n!)}}{\cancel{(2n)!}\cancel{2^n}\cdot 2\, \cancel{(n!)}(n+1)\cancel{(n!)}(n+1)} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+1)(2n+2)}{2(n+1)(n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4n^2+\dots}{2n^2+\dots} \right| = 2$$

$2 > 1$ → die Reihe divergiert

12 a) Majorantenkriterium

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{n^{n-2}\cdot 2\cdot 1}{n^n} = \frac{2}{n^2}$$

(oder Quotientenkrit.)

→ Die Reihe konvergiert

b) Wurzelkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3} \ \dots$$ existiert nicht

→ Die Reihe divergiert

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\right)^n$$

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} < 1,$$ da $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$

→ geometrische Reihe

→ Die Reihe konvergiert

13 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert (laut Skriptum)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert (laut Skriptum)

Damit divergiert ihre Summe.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} + \frac{n}{3^n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n}} = \frac{2}{3} \to$ konvergent (Wurzelkriterium)

$\frac{n}{3^n} \leq \frac{1}{n^2} \to n^3 \leq 3^n$ (Majorantenkriterium)

Induktionsbeweis zum Majorantenkriterium:

1) $n=0$: $0 \leq 1$ ✓
2) $n^3 \leq 3^n$
3) $(n+1)^3 \leq 3^{(n+1)}$
4) $n^3 \leq 3^n \Rightarrow 3\cdot n^3 \leq 3^{n+1}$

$(\sqrt[3]{3}\cdot n)^3 \leq 3^{n+1}$

$(n+1)^3 \overset{?}{\leq} (\sqrt[3]{3}\cdot n)^3$

$\Leftrightarrow n+1 \leq \sqrt[3]{3}\cdot n \Leftrightarrow 1 \leq (\sqrt[3]{3}-1)\cdot n$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1} \leq n$

$\Rightarrow (n+1)^3 \leq 3^{n+1}$ für $n \geq \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$ $\square$

Beide Reihen konvergieren absolut, also konvergiert auch deren Summe.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

Leibnizkriterium:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = 0$ ✓

monoton fallend ✓

$\to$ Konvergent

14 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \operatorname{ld} n}$

Verdichtungssatz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \operatorname{ld} 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{k \cdot 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$\Rightarrow$ Divergent laut Skriptum

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \operatorname{ld} n \operatorname{ld} \operatorname{ld} n}$

Verdichtungssatz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \operatorname{ld} 2^k \operatorname{ld} \operatorname{ld} 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \operatorname{ld} k}$$

Noch einmal Verdichtungssatz (siehe a)

$\Rightarrow$ Divergent

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(\operatorname{ld} n)^2}$

Verdichtungssatz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\operatorname{ld} 2^k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Konvergiert laut Skriptum

15 a) Für alle (entspricht e^x, siehe Skriptum)

b) Quotientenkriterium:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot n}{x^n \cdot (n+1)} \right| \overset{!}{<} 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x \cdot n}{n+1} \right| = |x| \Rightarrow$$ Die Reihe konvergiert für $|x| < 1$ absolut.

Was wenn $x = 1$?

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ ... Divergent laut Skriptum

Was wenn $x = -1$?

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ... Konvergent laut Skriptum