Analysis T1 — 6. Übungsblatt, 30.11.20..

Aufgabe 21

a) $\frac{ax+b}{cx+d}$ $\quad \left[\frac{ax+b}{cx+d}\right]' \underset{\text{Produktregel}}{=} \frac{a}{cx+d} + \frac{(-1)(ax+b)\cdot c}{(cx+d)^2} = \frac{acx+ad-acx-bc}{(cx+d)^2} =$

$= \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

b) $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$, n fix $\quad \left[\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^n\right]' \overset{\text{Kettenregel}}{=} n\cdot\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n-1}\cdot\left[\frac{ax+b}{cx+d}\right]'$

$= \frac{n(ax+b)^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$

c) $\ln\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{\frac{ax+b}{cx+d}}\cdot\left[\frac{ax+b}{cx+d}\right]' = \frac{cx+d}{ax+b}\cdot\frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(ax+b)(cx}$

d) $(1+e^x)^4\ln\left(x+\sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \overset{\text{Produktregel}}{=} 4\cdot(1+e^x)^3\overset{\text{Kettenregel}}{\cdot} e^x\cdot\ln\left(x+\sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) +$
$(1+e^x)^4\cdot\frac{1\cdot\left(1+2\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{-2}{x^3}\right)}{x+\sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

$= (1+e^x)^3\left(4e^x\ln\left(x+\sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + (1+e^x)\left(\frac{x^3-4\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^4+x^3\cdot\sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right)\right)$

Aufgabe 22

a) $2^{x^2\cos(x)} = e^{\ln(2)\cdot x^2\cdot\cos(x)}$ $\quad \left[e^{\ln(2)\cdot x^2\cdot\cos(x)}\right]' \overset{KR}{=} e^{\ln(2)x^2\cos(x)}\cdot(\ln(2)(2x\cos(x)-x$

$= 2^{x^2\cos(x)}\cdot x\cdot\ln(2)(2\cos(x)-x\sin(x))$

b) $x^x = e^{\ln(x)\cdot x}$ $\quad [e^{\ln(x)\cdot x}]' \overset{KR}{=} e^{\ln(x)\cdot x}\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot x+\ln(x)\right) = x^x(1+\ln(x))$

c) $(x^x)^x = x^{x\cdot x} = x^{x^2} = e^{\ln(x)\cdot x^2}$ $\quad [e^{\ln(x)\cdot x^2}]' = e^{\ln(x)\cdot x^2}\left(\frac{1}{x}\cdot x^2+\ln(x)\cdot 2x\right) = x\cdot(x^x)^x(1+$

d) $x^{(x^x)} = e^{\ln(x)\cdot(x^x)}$ $\quad [e^{\ln(x)(x^x)}]' = e^{\ln(x)(x^x)}\left(\frac{1}{x}\cdot(x^x)+\ln(x)\cdot \overbrace{x^x(1+\ln(x))}^{b)}\right) =$

$= x^{(x^x)}\left(x^{x-1}+\ln(x)\cdot x^x(1+\ln(x))\right) = x^{(x^x)}\cdot x^{x-1}(1+x\cdot\ln(x)+x\cdot\ln(x)^2$

Aufgabe 23

a) zz: $\sin(x) \le x \le \tan(x)$ für $0 \le x \le \pi/2$
Beachte: $\sin(0) = 0 \le 0 \le \tan(0) = 0$ $\Rightarrow$ Ungl. stimmen für $x=0$ ✓

Ableiten führt zu: zz: $\cos(x) \le 1 \le [\tan(x)]' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cos(x) \in [-1,1] \Rightarrow \cos(x) \le 1 \quad \forall x \in [0,\pi/2]$ ✓
$\cos^2(x) \in [0,1] \Rightarrow \frac{1}{\cos^2(x)} \ge 1 \quad \forall x \in [0,\pi/2)$ ✓

$\Rightarrow \sin(x) \le x \le \tan(x)$ für $0 \le x \le \pi/2$

b) zz: $\cos(x) \ge 1-\frac{x^2}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$
Beachte: $\cos(0) = 1 \ge 1-\frac{0^2}{2}$ $\Rightarrow$ Ungleichung stimmt für $x=0$ ✓
und $1-\frac{x^2}{2} = 1-\frac{(-x)^2}{2}$, $\cos(x) = \cos(-x)$

$\Rightarrow$ Es reicht für $x \in \mathbb{R}_0^+$ zu zeigen, dass $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ gilt.

Ableiten führt zu: zz: $-\sin(x) \geq -\frac{2x}{2} = -x \iff x \geq \sin(x)$

zz: $x \geq \sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}_0^+$

$0 \geq \sin(0) = 0 \rightsquigarrow$ Ungleichung stimmt für $x=0$

$\rightsquigarrow$ Ableiten führt zu: zz: $1 \geq \cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}_0^+$, das stimmt, da $\cos(x) \in [-1,1]$

$\Rightarrow x \geq \sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ für $x \in \mathbb{R}_0^+$

$\Rightarrow \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 24 a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{2x(1-\cos(x))} \overset{\text{Regel von de L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{2(1-\cos(x))+2x\sin(x)} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2\sin(x)+2\sin(x)}$$

$$\overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{4\cos(x)+2\cos(x)-2x\sin(x)} = \frac{\lim_{x\to 0} \cos(x)}{\lim_{x\to 0}(6\cos(x)-2\sin(x))} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x\cdot\cos(x)}{\sin^3(x)} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\cos(x)+x\cdot\sin(x)}{3\cdot\sin^2(x)\cdot\cos(x)} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+x\cdot c}{6\cdot\sin(x)\cdot\cos^2 - 3\cdot\sin^3}$$

$$\overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 1}{\cos(x)} + \overset{\to 1}{\cos(x)} - \overset{\to 0}{x\sin(x)}}{\underbrace{6\cdot\cos^3(x)}_{\to 6} + \underbrace{6\cdot 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot(-\sin(x))}_{\to 0} - \underbrace{9\cdot\sin^2(x)\cdot\cos(x)}_{\to 0}} = \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-\cos(x)}{\sin^2(x)} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cdot\sin(2x)+\sin(x)}{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos(2x)+}{2\cdot\cos^2(x)-2s}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0}(\overset{\to -4}{-4\cos(2x)} + \overset{\to 1}{\cos(x)})}{\lim_{x\to 0}(2(\cos^2(x)-\sin^2(x)))} = \frac{-3}{2}$$

Aufgabe 25 n-te Taylorpolynom im Entwicklungspunkt x_0:

a) $f(x) = x\cdot\ln(x)$, $x_0 = 1$ $\qquad f(x_0) = 1\cdot\ln(1) = 0$

$f'(x) = \ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln(x)+1 \qquad f'(x_0) = \ln(x_0)+1 = \ln(1)+1 = 1 \qquad f^{(n)}(x_0) = (-1)^n(n-2$

$f''(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x_0) = 1$

$f'''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f'''(x_0) = -1 \qquad \Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n\cdot\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$ für $n \geq 2$

$$\Rightarrow T_f^n(x;x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k = 0 + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k(k-1)}$$

$$= x - 1 + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k(x-1)^k}{k(k-1)} = \underline{\underline{-(1-x) + \sum_{k=2}^n \frac{(1-x)^k}{k(k-1)}}}$$

b) $f(x) = \sin^2(x)$, $x_0 = 0$ $\quad f(0) = \sin^2(0) = 0$

$f'(x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) \qquad f'(0) = 2\cdot\sin(0)\cdot\cos(0) = 0$

$f''(x) = 2\cdot\cos^2(x) - 2\cdot\sin^2(x) \qquad f''(0) = 2\cdot\cos^2(0) - 2\cdot\sin^2(0) = 2$

$f'''(x) = -4\cdot\cos(x)\cdot\sin(x) - 4\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) = -8\sin(x)\cdot\cos(x) \qquad f'''(0) = 0$

$f''''(x) = 8\sin^2(x) - 8\cos^2(x) \qquad f''''(0) = -8$

$\left.\begin{array}{l} f^{(2n)}(0) = (-1)^{n+1}\cdot \\ f^{(2n+1)}(0) = 0 \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow T_f^n(x;x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = 0 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{k+1}\cdot 2^{2k-1}}{(2k)!}\cdot x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{k+1}\cdot 2^{k-1}}{(2k)!}\cdot x^k$$