information & computer engineering
Basisgruppe Information and Computer Engineering
Inffeldgasse 16b, EG (Raum: ICEG094) - 8010 Graz, Austria
ice@htu.tugraz.at | +43 (316) 873 - 4134

31)

$A = 2m^2 = l \cdot b$

$r_o = r_u = 21cm = 0{,}21m$

$r_l = r_r = 14cm = 0{,}14m$

gesucht: l, b sodass $\underbrace{l' \cdot b'}_{\text{bedruckte Fläche } A'}$ maximal wird

$l' = (l - 2 \cdot r_l)$

$b' = (b - 2 \cdot r_o)$

aus $l \cdot b = 2m^2 \Rightarrow b = \frac{2m^2}{l}$

$\Rightarrow b' = \left(\frac{2m^2}{l} - 2r_o\right)$

$A' = l' \cdot b' = (l - 2r_l) \cdot \left(\frac{2m^2}{l} - 2r_o\right)$

$A' = 2m^2 - 2 \cdot l \cdot r_o - \frac{2r_l \cdot 2m^2}{l} + 4 \cdot r_l r_o$

$\frac{dA'}{dl} = 0 - 2r_o - (2r_l \cdot 2m^2) \cdot \frac{-1}{l^2} + 0$

$\frac{dA'}{dl} = \frac{2r_l \cdot 2m^2}{l^2} - 2r_o$

Ableitung $= 0$ für Extrema

$0 = \frac{2r_l \cdot 2m^2}{l^2} - 2r_o \Leftrightarrow 2r_o = \frac{2r_l \cdot 2m^2}{l^2} \quad | \cdot l^2$

$2r_o l^2 = 2r_l \cdot 2m^2 \quad | - 2r_l \cdot 2m^2, \ 1/2r_o$

$l^2 - \frac{r_l}{r_o} \cdot 2m^2 = 0$

$\Rightarrow l = \pm\sqrt{\frac{r_l}{r_o} \cdot 2m^2}$

$\Rightarrow l = 1{,}1547 \ m$

$\Rightarrow b = 1{,}7321 \ m$

32)

$f(x) = x^2 - x - 6$

1) Stetig und Differenzierbar ?

Ja, auf ganz $\mathbb{R}$

2) Nullstellen

$f(x) \overset{!}{=} 0 \iff x^2 - x - 6 \overset{!}{=} 0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 3$

$f(x) = (x+2) \cdot (x-3)$

3) Extremstellen

$f'(x) \overset{!}{=} 0 \qquad f'(x) = 2x - 1$

$\Rightarrow \quad 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1/2$

Extremstelle bei $x = 1/2$. $f(\frac{1}{2}) = -6{,}25$

Minimum od. Maximum ?

$f''(x) = 2$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ Minimum!

4) Wendepunkte

$f''(x) \overset{!}{=} 0$ nicht möglich, keine WP

5) Monotonie

auf $(-\infty, 1/2)$ streng monoton fallend

auf $(1/2, \infty)$ streng monoton wachsend

6) Krümmung

$f''(x) = 2$, $2 > 0$ gilt auf allen Intervallen

$\Rightarrow f(x)$ ist konvex

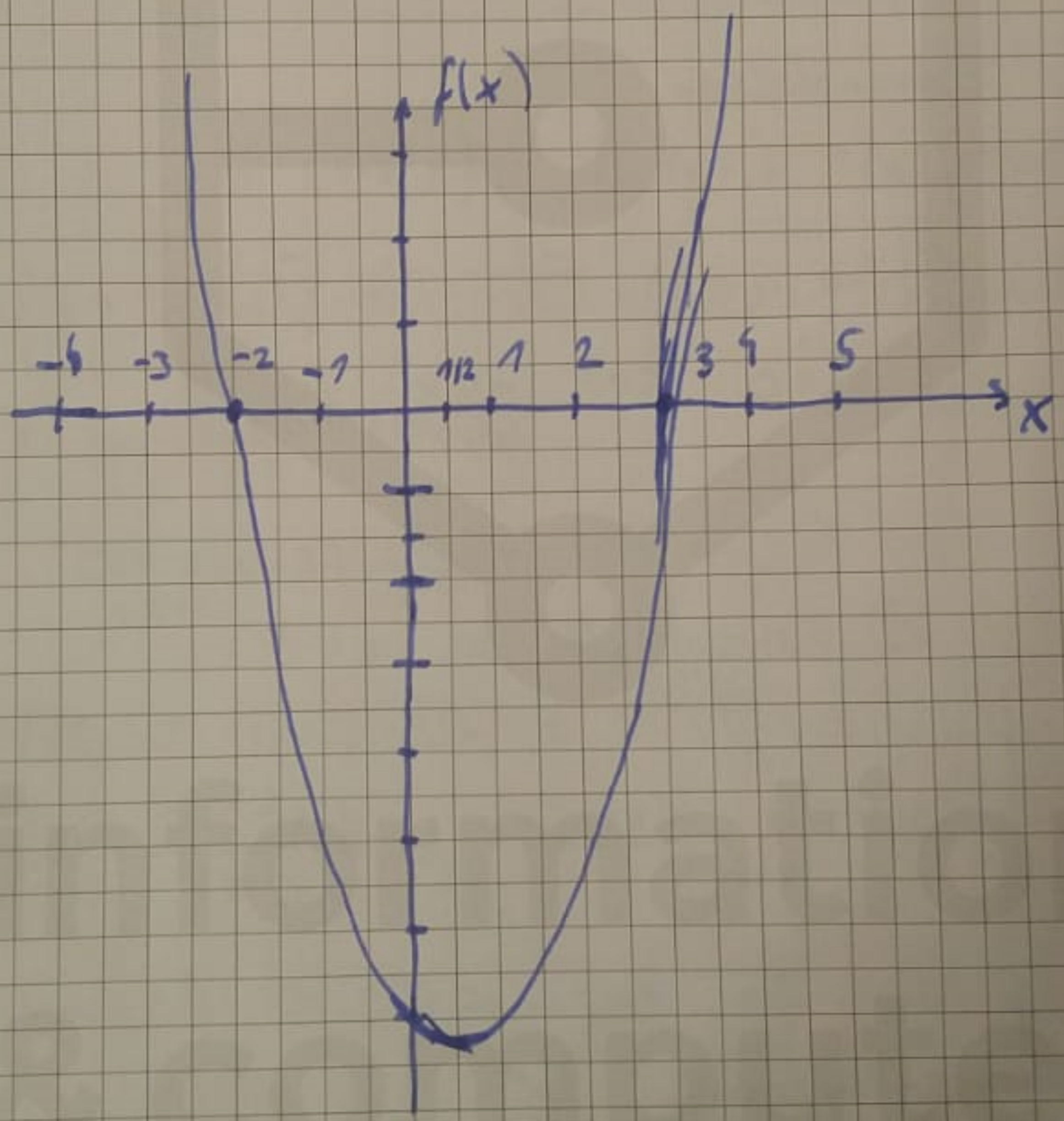
Besuche uns in der Basisgruppe oder auf www.ice.htu.tugraz.at

7) Grenzverhalten

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

8) Skizze



33)

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

1) Definitionsbereich

$D = \mathbb{R}$ überall stetig u. differenzierbar

2) Nullstellen

keine, da $\frac{1}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ ↯

3) Extremstellen

$f(x) = 1/(x^2+1) = (x^2+1)^{-1}$

$\frac{df}{dx} = (2x) \cdot \frac{-1}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = f'(x)$

$f'(x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow -2x = 0$ gilt für $x = 0$

$\Rightarrow$ Extremstelle bei $x = 0$

$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = (-2) \cdot \frac{1}{(x^2+1)^2} + (-2x) \cdot \frac{-4x}{(x^2+1)^3}$

$= \frac{(-2)\cdot(x^2+1) + (-4x \cdot -2x)}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}$

$f''(0) = \frac{-2}{1} = -2 < 0 \Rightarrow$ Maximum

4) Wendepunkte

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{1/3}$

Tangentensteigung:

$f'(-\sqrt{1/3}) = +0{,}64952$

$f'(\sqrt{1/3}) = -0{,}6495 2$

5) Monotonie intervalle

von $(-\infty, 0)$ streng monoton steigend
von $(0, \infty)$ streng monoton fallend

6) Krümmung

$f'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^2}$ 1. WP bei $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
2. WP bei $\frac{1}{\sqrt{3}}$

auf $(-\infty, -1/\sqrt{3})$: $f''(x) > 0 \Rightarrow$ Konvex

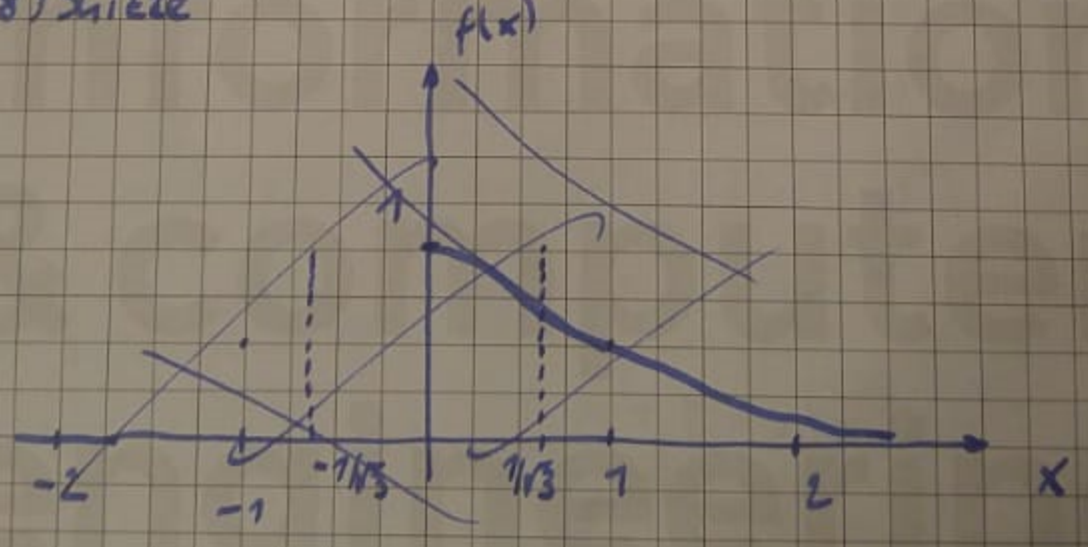
auf $(-1/\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$: $f''(x) < 0 \Rightarrow$ Konkav

7) Grenzverhalten

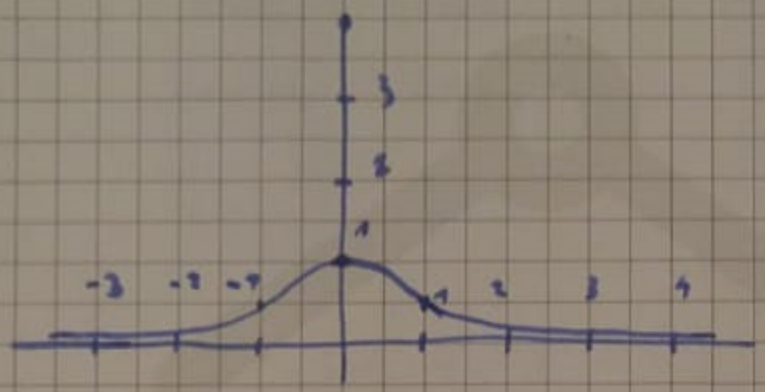
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{1+1/x^2} = \frac{0}{1} = 0$

da $x^2 = (-x)^2 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

8) Skizze



8) Skizze



34)

$f(x) = (x^2-1) \cdot e^x$

1) Definitionsbereich

$D = \mathbb{R}$

2) NS

$(x^2-1) \cdot e^x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = \pm 1$

3) Extrema

$f'(x) = 0$

$f'(x) = (2x) \cdot e^x + (x^2-1) \cdot e^x$

$= e^x \cdot (x^2 + 2x - 1)$

$x^2 + 2x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$

Besuche uns in der Basisgruppe oder auf www.ice.htu.tugraz.at

Extrema bei $x_1 = -1+\sqrt{2}$

$x_2 = -1-\sqrt{2}$

$f''(x) = 2 \cdot e^x + (2x)e^x + (2x)e^x + (x^2-1)e^x$

$f''(x) = e^x \cdot (x^2 + 4x + 1)$

für x_1: $f''(x) > 0$ lok. Minimum (sogar global)

für x_2: $f''(x) < 0 \Rightarrow$ lok. Maximum

4) Wendepunkte

$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$ $\qquad f'(x_1) = -1,1196$

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$ $\qquad f'(x_2) = 0,1308$

5) auf $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ steigend

~~auf $(-1-\sqrt{2}, \infty)$ steigend~~

auf $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$ fallend

auf $(-1+\sqrt{2}, \infty)$ steigend

6) Krümmung

$f''(x) = e^x \cdot (x^2 + 4x + 1)$

auf $(-\infty, -2-\sqrt{3})$: $f''(x) > 0 \Rightarrow$ konvex

auf $(-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})$ $f''(x) < 0 \Rightarrow$ konkav

auf $(-2+\sqrt{3}, \infty)$ $f''(x) > 0 \Rightarrow$ konvex

7) Grenzverhalten

$$\lim_{x \to -\infty} e^x \cdot (x^2 - 1) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{(x^2-1)^{-1}} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

($e^x \to 0$; $(x^2-1)^{-1}$: $1/\infty = 0$)

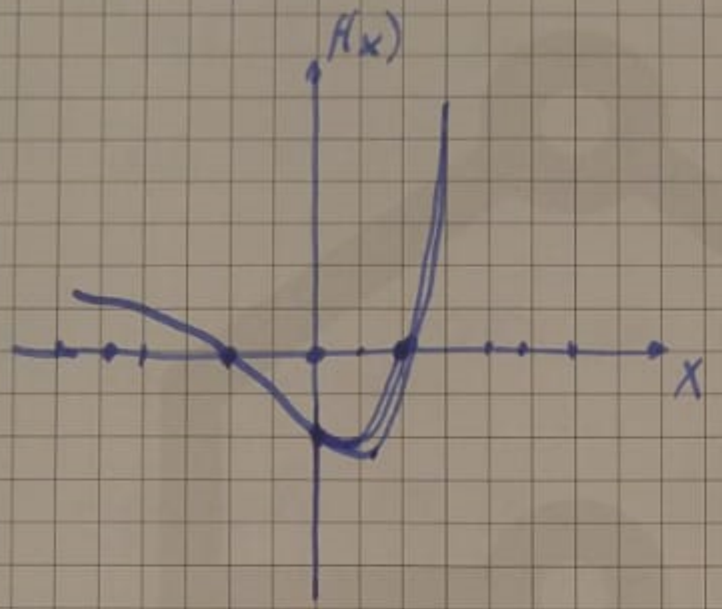
$$= \lim \frac{x^2-1}{e^{-x}} = \lim \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim \frac{2}{e^{-x}}$$

$= 0$

$$\lim_{x \to \infty} e^x (x^2 - 1) = \infty$$

Besuche uns in der Basisgruppe

8) Skizze



35)

$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}$

1) Def:

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$f'(x) = 2x \cdot \left(\frac{1}{x^2-1}\right) + x^2 \cdot \frac{-1}{(x^2-1)^2} \cdot 2x$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1} + \frac{-2x^3}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$

$f''(x) = -2 \cdot \frac{1}{(x^2-1)^2} + (-2x) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{(x^2-1)^3} \cdot (2x)$

$f''(x) = \frac{-2}{(x^2-1)^2} + \frac{8x^2}{(x^2-1)^3}$

$f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$

2) Nullstellen

$$\frac{x^2}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0$$

3) Extrema

$$\frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f''(0) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 \Rightarrow \text{Maximum}$$

4) WP

$$\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} = 0$$

$\Rightarrow 6x^2+2 = 0$ nicht möglich auf $\mathbb{R}$

5)

auf $(-\infty, -1)$ steigend

auf $(-1, 0)$ steigend

auf $(0, 1)$ fallend

auf $(1, \infty)$ fallend

6) Krümmung

$f''(x)$ auf $(-\infty, -1) > 0 \rightarrow$ konvex

auf $(-1, 1)$ $f''(x) < 0 \rightarrow$ konkav

auf $(1, \infty)$ $f''(x) > 0 \rightarrow$ konvex

7) Grenzverhalten

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

$$= \lim_{x \to \infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = \infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$$

information
& computer
engineering
Basisgruppe Information and Computer Engine
Inffeldgasse 16b, EG (Raum: ICEG094) - 8010 Graz, Austr
ice@htu.tugraz.at | +43 (316) 873 - 4134

8) Skizze