Mathematik C Übungen

11. Übungsblatt

---

1. Lösen Sie mit der Fourier-Methode folgendes Saitenschwingungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Dgl.:} \quad & u_{tt} = u_{xx} \\ \text{RB:} \quad & u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \geq 0, \\ \text{AB:} \quad & u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = \sin x. \end{aligned}$$

2. Lösen Sie mit der Fourier-Methode folgendes Saitenschwingungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Dgl.:} \quad & u_{tt} = 4u_{xx} \\ \text{RB:} \quad & u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \geq 0, \\ \text{AB:} \quad & u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = x(\pi - x). \end{aligned}$$

3. Lösen Sie mit der Fourier-Methode folgendes Wärmeleitungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Dgl.:} \quad & u_t = u_{xx} \\ \text{RB:} \quad & u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \geq 0, \\ \text{AB:} \quad & u(x,0) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 0 & \text{für } \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

4. Lösen Sie mit der Fourier-Methode folgendes Wärmeleitungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Dgl.:} \quad & u_t = u_{xx} \\ \text{RB:} \quad & u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \geq 0, \\ \text{AB:} \quad & u(x,0) = x(1 - x). \end{aligned}$$

5. Lösen Sie die folgende partielle Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} \text{Dgl.:} \quad & u_{xx} - 4u_t - 3u = 0, \qquad x \in [0,\pi], t \in [0,\infty), \\ \text{RB:} \quad & u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad \text{für } t \in [0,\infty), \\ \text{AB:} \quad & u(x,0) = x(x^2 - \pi^2), \qquad \text{für } x \in [0,\pi]. \end{aligned}$$

Gehen Sie folgendermaßen vor:

- Finden Sie mit dem Separationsansatz möglichst viele reelle Lösungen der Dgl. Durch Ableiten des Ansatzes $u(x,t) = f(x)g(t)$ bekommen Sie aus der Dgl.

$$f''(x)g(t) - 4f(x)g'(t) - 3f(x)g(t) = 0,$$

also

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = 4\frac{g'(t)}{g(t)} + 3,$$

was nur dann für alle x und t erfüllt sein kann wenn beide Seiten gleich einer Konstanten $k \in \mathbb{R}$ sind. Finden Sie die Lösungen dieser Gleichungen (abhängig von k).

- Identifizieren Sie darunter jene Lösungen, welche die RB erfüllen.
- Entwickeln Sie die AB in eine Fourier-Reihe.
- Machen Sie einen Superpositionsansatz $u(x,t) = \sum_n u_n(x,t)$ mit den Lösungen u_n aus b), und finden Sie so eine Lösung der Dgl. inklusive RB und AB.