Mathematik C Übungen

2. Übungsblatt

---

1. Überprüfen Sie den Satz von Green–Riemann für das Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y \\ \cos \pi x \end{pmatrix}$ und für das von den Punkten $(1,1), (2,1), (1,2), (2,2)$ aufgespannte Quadrat.

2. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld
$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \neq (0,0),$$
~~quellenfrei ist~~ die Integrabilitätsbedingung $Q_x = P_y$ erfüllt.[1]

3. Überprüfen Sie den Satz von Green-Riemann für das Vektorfeld
$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \neq (0,0),$$
und für den Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 1. (Was ist der Wert des Kurvenintegrals entlang des Randes? Was geht vor sich?)

4. [2] Bestimmen Sie das Potenzial des Vektorfeldes
$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x - x\sin x - 2\cos x \sin y \\ -2\sin x \cos y - \sin y \end{pmatrix},$$
und bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals $\int_\gamma \vec{v}\, d\vec{x}$ für die Kurve
$$\gamma : \ \vec{x}(t) = (t + \sin t, \sqrt{2\pi}\sqrt{t}), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

5. [3] Stellen Sie fest welches dieser Vektorfelder ein Gradientenfeld ist, und berechnen Sie gegebenenfalls das Potenzial.
$$a) \quad \begin{pmatrix} 2xy^2+1 \\ 2x^2y+1 \end{pmatrix}, \qquad b) \quad \begin{pmatrix} 2xy^2+x \\ 2x^2y+x \end{pmatrix},$$
$$c) \quad \begin{pmatrix} e^{x+y}\cos x + e^{x+y}\sin x \\ e^{x+y}\sin x \end{pmatrix}, \qquad d) \quad \begin{pmatrix} e^{x+y}\cos x + e^{x+y}\sin x \\ e^{x+y}\cos x \end{pmatrix}.$$

6. Berechnen Sie
$$\int_\gamma (-y^2 \sin(\pi x))\ dx + \left(\frac{2y\cos(\pi x)}{\pi}\right)\ dy$$
für
$$\gamma : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin^2 t \\ e^t \cos t \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq \pi/2.$$
(Hinweis: Verwenden Sie das zugehörige Potenzial.)

---

[1] Fehler in einer früheren Version dieses Angabeblattes. Am 18.10. korrigiert. Sorry.
[2] Beispiel von der Vorlesungsprüfung am 11.10.2017.
[3] Beispiel von der Vorlesungsprüfung am 13.6.2017.