

Mathematik C Übungen

3. Übungsblatt

1. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n.$$

2. Stellen Sie die folgenden Funktionen in der Form $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ dar.

$$\text{a) } f(z) = z^3, \quad \text{b) } f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad \text{c) } f(z) = e^{iz}.$$

3. Überprüfen Sie für die Real- und Imaginärteile der Funktionen aus dem vorigen Beispiel die Cauchy–Riemannschen Differenzialgleichungen.
4. Zeigen Sie: eine holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich, die nur reelle Werte annimmt, ist konstant.
5. Die Funktion $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ sei holomorph und $u(x, y) = \sinh(x) \cos(y)$. Berechnen Sie $v(x, y)$ und bestimmen Sie damit $f(z)$.
6. Für welche reellen Werte von a and b ist die Funktion $u(x, y) = x^2 + 2axy + by^2$ der Realteil einer holomorphen Funktion? Bestimmen Sie zu allen solchen Paaren von a and b die dazugehörige konjugiert harmonische Funktion $v(x, y)$. (Bonus: Drücken Sie jeweils $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ als Funktion von $z = x + iy$ aus.)