Mathematik C Übungen

4. Übungsblatt

---

1. Bestimmen Sie das Potenzial des ebenen Vektorfeldes $\vec{v}(x, y) = (x, -y)$, indem Sie zunächst dem Vektorfeld eine komplexe Feldfunktion zuordnen, damit das komplexe Potenzial bestimmen und dieses wieder in das reelle Potenzial von $\vec{v}$ überführen. Überprüfen Sie, dass die gefundene Funktion wirklich das Potenzial des ebenen Vektorfeldes ist.

2. Ordnen Sie dem ebenen Vektorfeld $\vec{v}(x, y) = (x^2 - y^2, -2xy)$ eine komplexe Feldfunktion zu. Bestimmen Sie für diese komplexe Feldfunktion den Wert des Kurvenintegrals entlang jener Kurve, die auf gerader Linie von 0 zum Punkt $1 + 2i$ führt. Folgern Sie daraus den Wert des reellen Kurvenintegrals $\int_\gamma \vec{v}\ d\vec{x}$ entlang jener Kurve, die auf geradem Weg von $(0, 0)$ nach $(1, 2)$ führt.

3. Berechnen Sie das folgende komplexe Kurvenintegrale. Skizzieren Sie die Integrationskurve.

$$\int_\gamma |z|\ dz, \qquad \gamma: \ z(t) = te^{2\pi i t}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

4. Berechnen Sie das folgende komplexe Kurvenintegrale. Skizzieren Sie die Integrationskurve.

$$\int_\gamma e^z\ dz, \qquad \gamma: \ z(t) = t^2 + it, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

5. Berechnen Sie das folgende komplexe Kurvenintegral direkt, indem Sie die angegebene Parametrisierung der Kurve verwenden.

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}\ dz, \qquad \gamma: \ z(t) = e^{2\pi i t}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

   Was passiert wenn Sie $1/z^2$ durch $1/z^n$ für $n \in \mathbb{N}$ ersetzen?

6. Berechnen Sie

$$\int_\gamma i\ \mathrm{Re}(z^2)\ dz,$$

   wobei γ die Kurve von 0 nach $1 + 2i$
   a) entlang der direkten Verbindungslinie, und
   b) entlang der reellen Achse bis 1, und dann vertikal nach $1 + 2i$, bezeichnet.