

Mathematik C Übungen

5. Übungsblatt

1. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{5z + 1}{z^3 - 2z^2 - 5z + 6} \quad \text{und} \quad \frac{z + 2}{z^4 + z^2}.$$

Was hat Partialbruchzerlegung mit Residuen zu tun?

2. Überprüfen Sie den Integralsatz von Cauchy für die Funktion $f(z) = z^2 + 1$ und den Rand des Dreieckes mit Eckpunkten 0, 2 und $2 + 2i$, indem Sie die Kurvenstücke parametrisieren und alle Integrale ausrechnen.

3. Bestimmen Sie die Residuen folgender Funktionen bei ihren Singularitäten:

$$a) \quad f(z) = \frac{z + 2}{z - 2}, \quad b) \quad f(z) = \frac{e^z + 1}{(z - 5)^3}, \quad c) \quad f(z) = \frac{\cos z}{z^5}, \quad d) \quad f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

4. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Kurvenintegral

$$\int_{|z|=1} \frac{6z^2 - 4z + 1}{(z - 2)(4z^2 + 1)} dz.$$

Mit dem Integral über $|z| = 1$ ist das Integral über den komplexen Einheitskreis, einmal in positiver Umlaufrichtung, gemeint. Machen Sie eine Skizze der Integrationskurve und der Pole der Funktion.

5. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das folgende Integral:

$$\int_{|z|=2} \frac{2}{z^2 - 2z - 3} + \frac{1}{z^3 - (2 + 2i)z^2 + 2iz} dz.$$

Dabei ist mit $|z| = 2$ jene Kurve gemeint, die auf einer Kreislinie den Nullpunkt einmal im Abstand 2 umrundet (gegen den Uhrzeigersinn). Hinweis: das Polynom $z^3 - (2 + 2i)z^2 + 2iz$ besitzt eine Nullstelle bei $z = 0$. Machen Sie eine Skizze der Integrationskurve und der Pole der Funktion.¹

6. Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Dabei ist

$$f(z) = \frac{80}{(z - 1)^2(z^2 + z - 6)},$$

und γ die Kurve $\gamma : z(t) = -2 + 2 \cos t + 2i \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Machen Sie eine Skizze der Integrationskurve und der Pole der Funktion.²

¹Beispiel von der Vorlesungsprüfung am 26.6.2018

²Beispiel von der Vorlesungsprüfung am 11.10.2017