

Differentialgleichungen VU Übungen

1. Übungsblatt für die Übung am 11.10.2019

1. Finden Sie einen Wert für die Zahlen $a \neq 0$ und $n \neq 0$ so dass die (implizite) Funktion

$$xy^n - ax^2 = 0$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$4xy^3y' = x - y^4$$

ist.

2. Konstruieren Sie (mit einem Taschenrechner oder Computer) zu dem Anfangswertproblem $y' = 2x$, $y(0) = 1$, den Eulerschen Polygonzug mit Schrittweite $h = 1$ auf dem Intervall $[0, 5]$. Verifizieren Sie, dass $y(x) = 1 + x^2$ die Lösung der Differentialgleichung ist. Berechnen Sie den Fehler an der Stelle $x = 5$, und vergleichen Sie mit der Fehlerabschätzung aus Behauptung 1 im Skriptum. Machen Sie eine Skizze.¹
3. Wie Beispiel 2, aber für das Anfangswertproblem $y' = 2y$, $y(0) = 1$, und dessen Lösung $y(x) = e^{2x}$. Was ist der Unterschied, und woran liegt das?
4. Bestimmen Sie mittels Trennung der Variablen die explizite Lösung des AWP $y' + xy^2 = 0$, $y(0) = 1$, für x im Bereich $[0, 1]$.
5. Bestimmen Sie mittels Trennung der Variablen (und Partialbruchzerlegung) die explizite Lösung des AWP $y' = (y^2 - 4)/x$, $y(0) = 2$, für x im Bereich $[-1/2, 1/2]$.

¹Auf der rechten Seite der DGL kommt y nicht vor, daher kann man die positive Konstante K beliebig klein wählen. Für $K \rightarrow 0$ wird die Fehlerschranke in Behauptung 1 zu $h^2 Mn/2$.