Mathematik C Übungen

2. Übungsblatt

---

1. Überprüfen Sie den Satz von Green–Riemann[1] für das Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x + y \\ e^x \end{pmatrix}$ und für den dreieckigen Bereich
$$B = \Big\{0 \leq y \leq x \leq 1\Big\}.$$

2. Überprüfen Sie den Satz von Green–Riemann für das Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ 2y - x \end{pmatrix}$ und für den Bereich B, wobei B eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt im Ursprung und mit Radius 2 ist.

3. Stellen Sie fest welches dieser Vektorfelder ein Gradientenfeld ist, und berechnen Sie gegebenenfalls das Potenzial.
$$a)\ \begin{pmatrix} 21x^2y + 2 \\ 7x^3 - 2y \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 21x^2y + 2 \\ 7x^3 + x - 2y \end{pmatrix},$$
$$c)\ \begin{pmatrix} e^{x+y}\cos x + e^{x+y}\sin x \\ e^{x+y}\sin x \end{pmatrix}, \qquad d)\ \begin{pmatrix} e^{x+y}\cos x + e^{x+y}\sin x \\ e^{x+y}\cos x \end{pmatrix}.$$

4. Berechnen Sie das Potenzial des Vektorfeldes
$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 8xy \\ 4x^2 + 2 \end{pmatrix},$$
und bestimmen Sie damit den Wert des Kurvenintegrals $\int_\gamma \vec{v}\, d\vec{x}$ für die Kurve
$$\gamma:\ \vec{x}(t) = (1 + t, t^2), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$
Berechnen Sie das Kurvenintegral auch direkt, ohne das Potenzial zu verwenden.

5. Berechnen Sie das Potenzial des Vektorfeldes
$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x - x\sin x - 2\cos x \sin y \\ -2\sin x \cos y - \sin y \end{pmatrix},$$
und bestimmen Sie damit den Wert des Kurvenintegrals $\int_\gamma \vec{v}\, d\vec{x}$ für die Kurve
$$\gamma:\ \vec{x}(t) = (t + \sin t, \sqrt{2\pi}\sqrt{t}), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

[1] Diese Beispiele vom Typ “Überprüfen Sie den Satz von Soundso ...” werden Sie öfters sehen – gemeint ist: Berechnen Sie beide Ausdrücke im Satz von Green–Riemann, und schauen Sie ob das Ergebnis wirklich zweimal dasselbe ist.