

Mathematik C Übungen

3. Übungsblatt

1. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

die Integrabilitätsbedingung $Q_x = P_y$ erfüllt, überall außer im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ (wo das Feld nicht definiert ist).

2. Das Vektorfeld \vec{v} in Beispiel 1 modelliert jenes Feld, das von einem senkrechten stromdurchflossenen Leiter erzeugt wird, der die xy -Ebene im Punkt $(0, 0)$ schneidet. Wie sieht das Feld aus, wenn sich dieser Schnittpunkt nicht an der Stelle $(0, 0)$, sondern an einer allgemeinen Stelle (a, b) befindet? Wie sieht das Feld aus, wenn *zwei* stromdurchflossene Leiter die xy -Ebene an verschiedenen Punkten schneiden (gleiche Stromrichtung, gleiche Stromstärke). Versuchen Sie eine Skizze zu machen.

3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n, \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

4. Stellen Sie die folgenden Funktionen in der Form $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ dar.

$$\text{a) } f(z) = z^2, \quad \text{b) } f(z) = \frac{1}{z}, \quad \text{c) } f(z) = e^z, \quad \text{d) } f(z) = \sin z.$$

5. Verwenden Sie die Darstellung der Winkelfunktionen durch die Exponentialfunktion, um folgende Formeln zu beweisen:

$$\sin(2x) = 2(\sin x)(\cos x), \quad \text{und} \quad (\sin x)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)),$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.