Mathematik C Übungen

4. Übungsblatt

---

1. Gegeben sei der Realteil $u(x, y) = 12x^2y^2 - 2x^4 - 2y^4$ einer holomorphen Funktion. Überprüfen Sie dass u harmonisch ist, und bestimmen Sie den dazu passenden (konjugiert harmonischen) Imaginärteil. Drücken Sie die gesamte Funktion $f = u + iv$ als Funktion der komplexen Variablen z aus.

2. Berechnen Sie das folgende komplexe Kurvenintegral. Skizzieren Sie die Integrationskurve.
$$\int_\gamma |z|\ dz, \qquad \gamma: \ z(t) = te^{2\pi i t}, \quad 0 \le t \le 1.$$
Warum können Sie hier nicht das komplexe Potenzial verwenden?

3. Berechnen Sie das folgende komplexe Kurvenintegral, a) direkt mittels einsetzen, ausmultiplizieren, und Integration entlang der angegeben Parametrisierung, bzw. b) unter Verwendung des komplexen Potenzials. Skizzieren Sie die Integrationskurve.
$$\int_\gamma z\ dz, \qquad \gamma: \ z(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + it, \quad 0 \le t \le 2.$$

4. Bestimmen Sie das Potenzial des ebenen Vektorfeldes
$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} 4x + e^{2x}\cos(2y) \\ -4y - e^{2x}\sin(2y) \end{pmatrix},$$
indem Sie zunächst dem Vektorfeld eine komplexe Feldfunktion zuordnen, diese Feldfunktion als Funktion der komplexen Variablen z ausdrücken, dann das entsprechende komplexe Potenzial bestimmen, und dieses wieder in das reelle Potenzial von $\vec{v}$ überführen. Überprüfen Sie, dass die gefundene Funktion wirklich das Potenzial des ebenen Vektorfeldes ist.[1]

5. Ordnen Sie dem ebenen Vektorfeld $\vec{v}(x, y) = (3x^2 - 3y^2 - 2x, -6xy + 2y)$ eine komplexe Feldfunktion zu, und drücken Sie diese Feldfunktion als Funktion der komplexen Variablen z aus. Bestimmen Sie mithilfe des komplexen Potenzials für diese komplexe Feldfunktion den Wert des Kurvenintegrals entlang jener Kurve, die auf geradem Weg von $1 + i$ nach $2 + 3i$ führt. Folgern Sie daraus den Wert des ebenen reellen Kurvenintegrals $\int_\gamma \vec{v}\ d\vec{x}$ entlang jener Kurve, die auf geradem Weg von $(1, 1)$ nach $(2, 3)$ führt.

---

[1] Im Skriptum steht für die Zuordnung der komplexen Feldfunktion zum ebenen Vektorfeld, dass diese Zuordnung die Form $\vec{v} = \binom{P}{Q} \mapsto f = P + iQ$ hat. Das ist aber *falsch*, die richtige Zuordnung ist $\vec{v} = \binom{P}{Q} \mapsto f = P - iQ$.