

# Mathematik C Übungen

## 5. Übungsblatt

1. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{5z + 1}{z^3 - 2z^2 - 5z + 6} \quad \text{und} \quad \frac{z + 2}{z^4 + z^2}.$$

Was hat Partialbruchzerlegung mit Residuen zu tun? (Hinweis, damit es ohne Taschenrechner lösbar ist: das Polynom 3. Grades hat eine Nullstelle bei  $z = 1$ .)

2. Bestimmen Sie die Residuen folgender Funktionen bei ihren Singularitäten (indem Sie die Formel für die Berechnung von Residuen verwenden):

$$a) \quad f(z) = \frac{z + 2}{z - 2}, \quad b) \quad f(z) = \frac{e^z + 1}{(z - 5)^3}, \quad c) \quad f(z) = \frac{\cos z}{z^5}, \quad d) \quad f(z) = \frac{(\sin z)^2}{z^2}.$$

Wie hätten Sie die Lösungen von c) und d) auch ohne Rechnung erhalten können, indem Sie stattdessen direkt die entsprechenden Laurentreihen betrachten?

3. <sup>1</sup>Berechnen Sie mithilfe des Residuensatzes das Kurvenintegral

$$\int_C f(z) \, dz.$$

Dabei ist  $f(z)$  die Funktion

$$f(z) = \frac{z + 1}{z^2 + 2z + 2} + \frac{3z}{z^3 + 3z^2 - 4},$$

und  $C$  die Kurve, die jeweils auf geradem Weg von  $-2i$  nach  $2i$ , dann weiter nach  $-3 + 2i$ , dann weiter nach  $-3 - 2i$ , und dann wieder zurück nach  $-2i$  führt. Machen Sie eine Skizze. Hinweis: das Polynom  $z^3 + 3z^2 - 4$  hat eine Nullstelle bei  $z = 1$ .

4. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Kurvenintegral

$$\int_{|z|=1} \frac{6z^2 - 4z + 1}{(z - 2)(4z^2 + 1)} \, dz.$$

Mit dem Integral über  $|z| = 1$  ist das Integral über den komplexen Einheitskreis, einmal in positiver Umlaufrichtung, gemeint. Machen Sie eine Skizze der Integrationskurve und der Pole der Funktion.

5. Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz.$$

Dabei ist

$$f(z) = \frac{80}{(z - 1)^2(z^2 + z - 6)},$$

und  $\gamma$  die Kurve  $\gamma : z(t) = -2 + 2 \cos t + 2i \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Machen Sie eine Skizze der Integrationskurve und der Pole der Funktion.

---

<sup>1</sup>Beispiel von der Vorlesungsprüfung am 25.10.2019