Mathematik C Übungen

9. Übungsblatt

---

1. Berechnen Sie den Fluss (in Richtung der positiven z-Achse) des Vektorfeldes
$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 - 4x \\ xz - 2z \\ x^2 + 2xy - 2z \end{pmatrix}$$
durch eine in der Ebene $z = 0$ liegende Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und mit Radius 2.

2. Verifizieren Sie den Satz von Gauß für das Vektorfeld
$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$
und für den Körper $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 9, \ z \ge 0\}$. Sie können verwenden dass $(\sin x)^2(\cos x) = \frac{\cos x}{4} - \frac{\cos(3x)}{4}$ und $(\sin x)^3 = \frac{3\sin x}{4} - \frac{\sin(3x)}{4}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

3. Verifizieren den Satz von Stokes für das Vektorfeld
$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
und für die Oberfläche jener Halbkugel, die durch die Gleichungen $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ und $z \ge 0$ definiert ist. Verwenden Sie die Formel $(\sin x)^4 + (\cos x)^4 = 3/4 + (\cos 4x)/4$.

4. Lösen Sie mit der Fourier-Methode folgendes Saitenschwingungsproblem:
$$\begin{array}{rl} \text{Dgl.:} & u_{tt} = u_{xx} \\ \text{RB:} & u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \ge 0, \\ \text{AB:} & u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = \sin x. \end{array}$$

5. Lösen Sie mit der Fourier-Methode folgendes Wärmeleitungsproblem:
$$\begin{array}{rl} \text{Dgl.:} & u_t = u_{xx} \\ \text{RB:} & u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \ge 0, \\ \text{AB:} & u(x,0) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x \le \pi/2, \\ 0 & \text{für } \pi/2 < x \le \pi. \end{cases} \end{array}$$