6. Zeigen Sie für beliebige endliche Teilmengen A und B einer Menge R gilt

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Leiten Sie daraus eine entsprechende Formel für $|A \cup B \cup C|$ her.

Hinweis: Mit $|M|$ wird die Anzahl der Elemente von M bezeichnet.

7. Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ sei $M_m = \{x \in \mathbb{R} | m - 1 < x \leq m + 1\}$. Bestimmen Sie

$$\text{(a)} \quad \bigcup_{-m \in \mathbb{N}_0} M_m \qquad \text{(b)} \quad \bigcup_{m \in \mathbb{N}} M_{m+5}.$$

8. Zeigen Sie, dass für beliebige Teilmengen A, B, C, D einer Menge M gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \\ \text{(b)} & (A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D). \end{array}$$

9. Es seien I und J zwei Mengen. Für jedes $i \in I$ und jedes $j \in J$ sei $M_{i,j}$ eine Menge.

   (a) Zeigen Sie

$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} M_{i,j} \subseteq \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} M_{i,j}.$$

   (b) Geben Sie ein Beispiel an mit

$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} M_{i,j} \neq \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} M_{i,j}.$$

10. Es sei f eine Abbildung der Menge M in die Menge N und $A, B \subseteq M$ sowie $C, D \subseteq N$. Die Urbildmenge von C ist definiert als

$$f^{(-1)}(C) = \{x \in M \mid f(x) \in C\};$$

die Bildmenge von A is definiert als

$$f(A) = \{y \in N \mid \exists x \in A : f(x) = y\}.$$

Zeigen Sie:

   (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
   (b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$; es gilt nicht notwendig „=“ (finden Sie ein Beispiel);
   (c) $f^{(-1)}(C \cup D) = f^{(-1)}(C) \cup f^{(-1)}(D)$;
   (d) $f^{(-1)}(C \cap D) = f^{(-1)}(C) \cap f^{(-1)}(D)$;
   (e) Wenn f bijektiv ist, dann gilt $f^{-1}(C) = f^{(-1)}(C)$.