16. Zeigen Sie, dass jede der folgenden drei Zählaufgaben auf die gleiche Anzahl führt:

    (a) Es werden aus n unterscheidbaren Objekten k Objekte mit Zurücklegen gezogen, ohne die Reihenfolge zu berücksichtigen.

    (b) Auf n Zellen sollen k nicht unterscheidbare Teilchen verteilt werden, wobei jede Zelle beliebig viele Teilchen aufnehmen kann.

    (c) Gesucht ist die Anzahl der monoton wachsenden Folgen der Länge k; d.h.,

    $$\#\Big\{(a_1,\dots,a_k)\in\{1,2,\dots,n\}^k \,\Big|\, a_1\le a_2\le\cdots\le a_k\Big\}.$$

    Benützen Sie eine dieser Zählaufgaben, um zu zeigen, dass die gesuchte Anzahl $\binom{n+k-1}{k}$ ist.

17. Beweisen Sie folgende Formel für die n-te Fibonacci-Zahl F_n (rekursiv gegeben durch $F_0=0$, $F_1=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ für $n\in\mathbb{N}$):

    $$\forall n\in\mathbb{N}_0: \qquad F_n=\frac{\varphi_+^n-\varphi_-^n}{\sqrt{5}},$$

    wobei $\varphi_+=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\varphi_-=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ die Nullstellen des Polynoms x^2-x-1 sind.

18. Zeigen Sie die folgende Identität mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

    $$\sum_{\ell=0}^{k}\binom{m}{\ell}\binom{n}{k-\ell}=\binom{m+n}{k},$$

    wobei $k,m,n\in\mathbb{N}_0$ und $0\le k\le m+n$.

19. Zeigen Sie für alle $n\in\mathbb{N}$ und alle Variablen $a_1,\dots,a_n$ und $b_1,\dots,b_n$:

    $$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=s_nb_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}s_k\left(b_{k+1}-b_k\right),$$

    wobei $s_k=\sum_{j=1}^{k}a_j$.

20. Zeigen Sie für alle $n\in\mathbb{N}$:

    $$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2=\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{m=\ell+1}^{n}\left(a_\ell b_m-a_mb_\ell\right)^2,$$

    wobei $a_1,\dots,a_n$ und $b_1,\dots,b_n$ beliebige reelle Zahlen sind.