21. Es sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Folgengliedern gegeben:

$$a_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:
   $$a_n \in \mathbb{N}.$$

   (b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:
   $$\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} < \sqrt{2} - 1 < \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}.$$

   (c) Bestimmen Sie den Durchschnitt
   $$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ r \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} \leq r \leq \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \right\}.$$

22. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$\frac{|x^2+3x+2|}{x-2} \leq 15?$$

23. Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

24. Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und entweder $x_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, n$ oder $-1 < x_i \leq 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie in beiden Fällen die Gültigkeit der Ungleichung
$$\prod_{k=1}^{n} (1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

25. Bestimmen Sie, falls möglich, Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der folgenden Mengen:

   (a) $A := \left\{ r \in \mathbb{Q} \,\middle|\, 2 < r^2 \leq 169 \right\}$,

   (b) $B := \left\{ \frac{x}{x-1} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}, x < 1 \right\}$,

   (c) $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n-1}{n+1}, \frac{2n+1}{n+1} \right)$,

   (d) $D_q := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}\ \exists (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{1-q, q-1\}^n : x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{q^k} \right\}, \quad q \in \mathbb{N}.$