26. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Beschreiben Sie unter Verwendung von Quantoren, was die beiden folgenden Aussagen bedeuten:

$$\text{(a)} \quad \inf M < 5 \qquad \text{(b)} \quad \sup M < 10.$$

27. Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere beschränkte Mengen. Zeigen Sie:

    (a) Für die *direkte Summe* $A + B := \{x \mid \exists a \in A \exists\, b \in B : x = a + b\}$ gilt

    $$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B), \qquad \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B).$$

    (c) Für die Vereinigung $A \cup B$ und den nichtleeren Durchschnitt $A \cap B$ gilt

    $$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}, \qquad \max\{\inf(A), \inf(B)\} \le \inf(A \cap B).$$

    Kann die zweite Ungleichung auch strikt (mit $<$) erfüllt sein?

28. Es seien $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $(J_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $J_n = [c_n, d_n]$ für $n \in \mathbb{N}_0$ Intervallschachtelungen für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$, wobei $a_1, c_1 > 0$ gelten soll.

    Zeigen Sie, dass $(H_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $H_n = [a_n c_n, b_n d_n]$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Intervallschachtelung für xy ist.

29. Bestimmen Sie die Nullstellen des folgenden Polynoms vom Grad 4:

    $$p(z) := z^4 - \frac{3}{2}z^3 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{3}{2}z + 1.$$

    Hinweis: Dividieren Sie die Glg. $p(z) = 0$ durch z^2 und nützen Sie Symmetrien aus.

30. Zeigen Sie:

    $$\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} \in \mathbb{Z}.$$

    Hinweis: Ausrechnen mit Taschenrechner ist kein Beweis.