

31. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegungen der folgenden rationalen Funktionen:

$$(a) \frac{x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 3x + 2}{x^3 - 3x^2 - x + 3} \quad (b) \frac{x^2 + 3x + 2}{(x + 2)(x^2 + 2x + 2)}.$$

32. Bestimmen Sie:

(a) Die Quadratwurzeln von $-i$.

(b) Zeigen Sie, dass $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ eine sechste Wurzel aus 1 ist.

33. Lösen Sie folgende Gleichung über den komplexen Zahlen. Geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil der Lösung an. Geben Sie die Polarform der Lösung an.

$$\frac{(4 + 3i)z + 2 - 11i}{(3 + 4i)z + 5 - 10i} = 2iz - \frac{51}{25} - \frac{32}{25}i.$$

34. Untersuchen Sie, welche Teilmenge von \mathbb{C} durch folgende Bedingungen festgelegt wird und stellen Sie sie in der Gauß'schen Zahlenebene dar:

$$(a) \left| \frac{z - 1 - i}{z - 2} \right| = 1 \quad (b) |z - 1| < \operatorname{Im} z + 1 \quad \text{und} \quad |\arg z| \leq \pi/3.$$

35. Bestimmen Sie die Summe

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}.$$

Hinweis: Zeigen und benützen Sie, dass für eine dritte Einheitswurzel $\zeta \neq 1$ gilt

$$\sum_{\ell=0}^2 \zeta^{k\ell} = \begin{cases} 3 & \text{wenn } 3 \text{ teilt } k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$