36. Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{n^2 - 3n + (-1)^n}{3n^2 - 7n + 5}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

konvergent? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an. Ebenso, wenn ein Grenzwert a existiert, geben Sie für alle $\varepsilon > 0$ ein N_ε an, so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$.

37. Untersuchen Sie die folgenden rekursiv definierten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte.

    (a) $x_{n+1} = \frac{2}{2+x_n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0 = 1/2$.

    (b) $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0 = 1/2$.

38. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \limsup\,(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n, \\ &\text{(b)} \quad \liminf\,(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n. \end{aligned}$$

Geben Sie *ein* Folgenpaar an, für welches sowohl in (a) als auch in (b) strikte Ungleichheit gilt.

39. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a.

    (a) Zeigen Sie, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad n \in \mathbb{N},$$

gegen den selben Grenzwert a konvergiert.
Hinweis: Zeigen Sie für $\epsilon > 0$ die Ungleichungen

$$a - \epsilon \leq \liminf \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \limsup \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq a + \epsilon.$$

    (b) Geben Sie eine nichtkonvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, für die die zugehörige Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.