40. Sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *subadditiv*; d.h., $x_{m+n} \leq x_m + x_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Setzen Sie $L := \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{n}$. Zeigen Sie: entweder ist $L = -\infty$ (und damit $\frac{x_n}{n} \to -\infty$ für $n \to \infty$) oder der Grenzwert der Folge $(\frac{x_n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ existiert und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = L.$$

Hinweis: Schreiben Sie $n = km + r$ für $0 \leq r < m$ und verwenden Sie die Subadditivität um x_n mittels x_m und x_r abzuschätzen. Zeigen Sie damit, dass $\frac{x_n}{n} \leq \frac{x_m}{m} + \frac{x_r}{n}$.

41. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie die Ungleichungen

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Zeigen Sie, dass aus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

42. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \binom{2n}{n} 5^{-n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k^2 + k + 5}{3k^4 - k^3 - 17}$.