43. (a) Zeigen Sie, dass aus der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und der Beschränktheit der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ folgt.

    (b) Sei nun $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent aber nicht notwendig absolut konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Konvergiert dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$?
    (Beweis oder Gegenbeispiel.)

44. Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ heißt *quadratsummierbar*, wenn die Reihe $\sum_{i\in I} |a_i|^2$ konvergiert.

    Es seien $(a_i)_{i\in I}$ und $(b_i)_{i\in I}$ zwei quadratsumierbare Familien mit derselben Indexmenge I. Zeigen Sie:

    (a) Die Familie $(a_i b_i)_{i\in I}$ ist summierbar.

    (b) Die Familie $(a_i + b_i)_{i\in I}$ ist quadratsummierbar.

    Hinweis: $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$.

45. Gegeben seien die Reihen $A = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ und $B = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$.

    Berechnen Sie die Cauchy-Produkte AB, A^2, A^3.

46. Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!(2n-1)!(-7)^n}$$

    auf Konvergenz.

47. Untersuchen Sie die folgenden Potenzreihen

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(3+(-1)^n)^n} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3^n}{n^2} z^n$$

    auf Konvergenz.

    Hinweis: Bestimmen Sie den Konvergenzkreisradius R (Skizze). Für das Konvergenzverhalten am Rand des Konvergenzkreises setzen Sie $z = Rw$ mit $w \in \mathbb{C}$ und $|w| = 1$.