53. Sei die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{q} & \text{für } x = \dfrac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{N}_0 \text{ und } q \in \mathbb{N} \text{ und } p, q \text{ teilerfremd } (0 = \dfrac{0}{1}). \end{cases}$$

In welchen Punkten ist f stetig?

Hinweis: Verwenden Sie das Folgenkriterium. Zeigen Sie: Für eine Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von rationalen Zahlen $r_n = p_n/q_n$ mit $p_n, q_n \in \mathbb{N}$ und p_n, q_n teilerfremd, welche gegen eine irrationale Zahl $x_0 \in (0,1)$ konvergiert, ist die Nenner-Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.

54. Zeigen Sie: Die Funktion $x \mapsto \sqrt[k]{x}$, k eine natürliche Zahl größer 1, ist auf $[0,\infty)$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

55. Sei $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Gleichung

$$\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n} = c$$

hat im Fall $c = 0$ genau $n-1$ reelle Lösungen, im Fall $c \neq 0$ genau n.

56. Besitzt die Funktion

$$f(x) := \frac{5x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

ein Maximum oder ein Minimum auf $[1/2, \infty)$?

57. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren:
(a) $\dfrac{z^m - 1}{z^n - 1}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und $z \to 1$ $(m, n \in \mathbb{N})$,
(b) $x(x - [x])$ für $x \in \mathbb{R}$ und $x \to 0$,
(c) $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $x \to \infty$.