

58. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{a} - 1)$, wobei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt[n]{p(n)} - 1}{\ln(n)}$, wobei p ein Polynom vom Grad d mit $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = +\infty$ ist.

59. Berechnen Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^q}{n!}, \quad q = 4.$$

Zusatz: Zeigen Sie, dass diese Summe für $q \in \mathbb{N}_0$ ein ganzzahliges Vielfaches von e ist.

60. Sei f eine reelle auf dem Intervall (a, b) stetige Funktion mit

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty.$$

Zeigen Sie, dass f in (a, b) eine Nullstelle hat.

61. Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, $L \subset \mathbb{R}$ und die Abbildung $f : K \rightarrow L$ sei stetig und bijektiv.

Beweisen sie, dass dann auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : L \rightarrow K$ stetig ist.

62. Zeigen Sie: Es gibt keine stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die jeden Funktionswert genau zweimal annimmt.