11. Zeigen Sie folgende Identität: Für $n, m, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ und $k \leq m$ gilt:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell}\binom{m}{k-\ell}$$

Hinweis: Wenden Sie den Binomischen Lehrsatz auf $(x+1)^{m+n} = (x+1)^m(x+1)^n$ *an (formale Rechnung).*

12. Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

13. Zeigen Sie für $n, k \in \mathbb{N}$:

$$\#\Big\{(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \;\Big|\; n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n\Big\} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Hinweis: Reduzieren Sie auf aus der VO bekannte Abzählaufgaben. Vergleichen Sie mit dem Fall, wenn $\mathbb{N}$ *durch* $\mathbb{N}_0$ *ersetzt wird.*

14. Gegeben ist ein $2 \times n$ Spielfeld. Bedecken Sie dieses Feld mit 1×2 Dominosteinen so, dass keine zwei Dominosteine sich überdecken und keine Lücken auf dem Spielfeld bleiben. Die Dominosteine können senkrecht und/oder waagrecht angeordnet werden.

    (a) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne A_n die Anzahl der erlaubten Bedeckungen. Zeigen Sie, dass $A_n = F_{n+1}$, wobei F_n die folgende Rekursion erfüllt:

    $$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$

    wobei $F_0 := 0$ und $F_1 = 1$.

    (b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass F_n für $n \in \mathbb{N}$ durch folgende Formel direkt berechnet werden kann:

    $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\psi_+^n - \psi_-^n\right),$$

    wobei $\psi_+ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\psi_- = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ mit $\psi_+ + \psi_- = 1$ und $\psi_+\psi_- = -1$.