20. (a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion für $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

(b) Verwenden Sie Beispielteil (a), um für $0 < q < 1$ folgendes zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : \frac{1}{1-q} - \varepsilon < \sum_{k=0}^{n} q^k < \frac{1}{1-q}.$$

21. Es sei $a_j \in \{0, 1\}$ für $j = 1, 2, \ldots$. Zeigen Sie, dass die Intervalle

$$I_n := \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{2^j}, \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^n} \right], \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

eine Intervallschachtelung bilden.

Zeigen Sie dann, dass es zu jeder reellen Zahl im Intervall $[0, 1]$ eine Intervallschachtelung der Form (1) gibt.

22. Es sei f eine Abbildung der Menge M in die Menge N und $A, B \subseteq M$ sowie $C, D \subseteq N$. Zeigen Sie:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Es gilt nicht notwendig „=“ (Beispiel!)

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

23. Sei A eine nicht leere Menge und $\mathcal{P}(A)$ die Menge ihrer Teilmengen. Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung $f : A \to \mathcal{P}(A)$ gibt.

Hinweis: Betrachten Sie für eine Abbildung $f : A \to \mathcal{P}(A)$ die Menge $\{a \in A \mid a \notin f(a)\}$.

24. (Abstrakter Nonsens.) Gegeben ist eine beliebige Abbildung $f : A \to B$. Auf der Menge A wird eine Äquivalenzrelation $\sim$ erklärt durch:

$$a \sim b :\Leftrightarrow f(a) = f(b) \qquad \text{für alle } a, b \in A.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $F : A/\sim \to f(A)$ mit $[a] \mapsto f(a)$ für alle $a \in A$ ist eine Bijektion.

(b) Ist $g : A \to A/\sim$ erklärt durch $a \mapsto [a]$ für alle $a \in A$, dann gilt $f = F \circ g$. Weiters, geben Sie die Umkehrabbildung $F^{(-1)}$ von F an.

Diese Aufgabe ist eine Zusatzaufgabe (Bonuskreuz).