

25. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von $z \in \mathbb{C}$, sowie z^2 und $|z|^2$.

a) $\frac{1-i}{1-2i}z = \frac{2+2i}{1+3i}$ b) $z = \frac{i+3}{2i-4}$ c) $z = (2+i)^2 + 7 - 3i$

26. Zeichnen Sie die Punktmenge:

(a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 2|z+1|\}$;

(b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} : \frac{|z-1|}{|z+2i|} < 1\}$;

(c) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1, \operatorname{Re}(z) < 1/2, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

27. Lösen Sie die Gleichung $z^5 = 1$ über den komplexen Zahlen und zeichnen Sie die Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene (komplexe Zahlenebene).

Hinweis: Verwenden und zeigen Sie die Faktorisierung

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 + \tau z + 1)(z^2 - \tau^{-1}z + 1),$$

wobei $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der goldene Schnitt ist.

28. Zeigen Sie, dass

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$$

eine ganze Zahl ist.

Hinweis: Finden Sie ein Polynom, das die gegebene Zahl als Nullstelle hat.

29. Zerlegen Sie folgende rationale Funktion in Partialbrüche:

$$\frac{x^4 - x^3 + 5x^2 + 2x - 40}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}.$$

Hinweis: Ganzzahlige Nullstellen eines Polynoms können Teiler eines ganzzahligen konstanten Terms sein. Verwenden Sie diese Tatsache, um eine Nullstelle des Nenners zu finden.