30. Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen reeller Zahlen beschränkt sind, und bestimmen Sie ggf. Supremum und Infimum:

$$\text{(a)}\quad \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n+1} - \frac{1-(-1)^n}{2n},\, n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\text{(b)}\quad \left\{x \in \mathbb{R} : x = u + \frac{1}{u},\, 0 < u < 11\right\},$$

$$\text{(c)}\quad \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 1 > 5,\, x < 0\right\}.$$

31. Sei A eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Was lässt sich über A sagen, wenn

(a) $\sup(A) < 3$,	(b) $\sup(A) = 3$,	(c) $\sup(A) > 3$,
(d) $\inf(A) \leq -2$,	(e) $\inf(A) = -2$,	(f) $\inf(A) \geq -2$.

Wie ändern sich die Aussagen über A, wenn sup durch max bzw. inf durch min ersetzt werden?

32. Untersuchen Sie die Folgen

$$\text{(a)}\ \left(\frac{(n+1)(n^2-1)}{(2n+1)(3n^2+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{(b)}\ \left(\frac{1}{n^2} + (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{(c)}\ \left(\frac{5^n+1}{4^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

33. Untersuchen Sie die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei die Glieder x_n wie folgt gegeben sind

$$\text{(a)}\ \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}, \quad a, b, c > 0, \qquad \text{(b)}\ \sqrt{n}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right),$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

34. Sei $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0$ ein Polynom mit reellen oder komplexen Koeffizienten vom festen Grad k.

Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P(n)|}.$$

35. Zeigen Sie für die folgende rekursiv gegebenen Folge die Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert:

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \qquad x_0 = 0.$$