36. Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist rekursiv definiert durch

$$a_0 := 0, \qquad a_1 := 2, \qquad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{3} + \frac{2a_n}{3}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass diese Folge konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert.

37. Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{4}x_n^2$ und $x_1 = 1$. Zeigen Sie

    (a) Diese Folge ist beschränkt und zwar $3/4 \leq x_n \leq 1$.

    (b) Diese Folge ist nicht monoton.

    (c) Diese Folge ist eine Cauchy-Folge und daher konvergent.

    (d) Bestimmen Sie den Grenzwert dieser Folge.

38. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

gegen den selben Grenzwert konvergiert. Geben Sie eine nichtkonvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, für die die zugehörige Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

39. Untersuchen Sie die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{3n^2+k}{2n^3+k}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert, falls dieser existiert.

Anleitung: Finden Sie zwei geeignete Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit gemeinsammen Grenzwert a so, dass $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

40. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\text{(a)} \quad \limsup\,(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n,$$
$$\text{(b)} \quad \liminf\,(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n.$$

Geben Sie *ein* Folgenpaar an, für welches sowohl in (a) als auch in (b) strikte Ungleichheit gilt.

41. Eine nichtnegative Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *subadditiv*, wenn

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m \qquad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: Für jede nichtnegative subadditive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}.$$

Anleitung: Zeigen Sie

(1) $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$ *existiert;*

(2) $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ *existiert;*

(3) $a_{\ell k+m} \leq \ell a_k + a_m$ *für alle* $\ell, k, m \in \mathbb{N}$*;*

(4) für $k \in \mathbb{N}$ *fest und* $n > k$ *gilt* $\frac{a_n}{n} \leq \frac{\ell k}{n}\frac{a_k}{k} + \frac{a_m}{n}$, *wobei* $\ell = \ell_n$ *und* $1 \leq m = m_n \leq k-1$, *sodass* $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_k}{k}$*;*

(5) $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{k}$*;*

(6) $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{k} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.