Übungsblatt 08

42. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie die Ungleichungen

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

43. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-16n}{n^3+21n^2-11n+6}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n n(n+1)}{(3n)!}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2}{n^4+1}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} 5^{-n}$, (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

44. Zeigen Sie: Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut.

Dies gilt jedoch nicht bei bedingt[1] konvergenten Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Finden Sie ein Gegenbeispiel, wobei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar eine Nullfolge ist.

45. Berechnen Sie die Summen der Reihen

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

46. Sei $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Permutation, für die $(|n-\sigma(n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

[1] Eine Reihe heißt *bedingt konvergent*, falls diese konvergent aber nicht absolut konvergent ist.