UE Analysis 1 (MAT102)

Übungsblatt 10

WS 2020/2021

52. Führen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}{|x^2 + x - 6|}$$

folgendes Untersuchungsprogramm durch:

(a) Wie groß ist der maximale Definitionsbereich $D(f)$?

(b) Wo ist f unstetig? Bestimmen Sie den Stetigkeitsbereich $S(f)$.

(c) Besitzt f an den Rändern von $S(f)$ Grenzwerte, eventuell auch einseitige?

(d) Lässt sich f irgendwo stetig ergänzen?

(e) Geben Sie eine (grobe) Skizze von f an.

53. Sei D eine beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to x_0} f(x)$ genau dann für alle Häufungspunkte x_0 von D existiert, wenn f auf D gleichmäßig stetig ist.

54. Zeigen Sie: Die auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ durch

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

definierte Funktion ist stetig und hat die Periode 1 (d.h., $g(z+1) = g(z)$).

Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass die Funktion g auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ normal konvergiert. Zum Nachweis der 1-Periodizität betrachten Sie für feste z den Grenzwert der Differenz $g_N(z+1) - g_N(z)$ der N-ten Partialsummen der Reihe. Zeigen Sie, dass g_N die Darstellung $g_N(z) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z+n}$ hat.

55. Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, wobei $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass $\exp(a) = 2$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie die Funktionalgleichung $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ und die Grenzwertbeziehung $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$. Verwenden und zeigen Sie $\exp(\frac{1}{k}) = (1 + \frac{1}{k})\exp(\frac{x_k}{k})$, wobei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge ist.

56. Zeigen Sie: Jeder Punkt des Cantorschen Diskontinuums $\mathcal{C}$ ist ein Häufungspunkt von $\mathcal{C}$.