

57. Bestimmen Sie

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Hinweis: Doppelwinkelformel $\cos(2x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = 2(\cos(x))^2 - 1$.

58. Finden Sie alle Lösungen von

$$z^3 = -4 + i\sqrt{48}.$$

59. Finden Sie geschlossene Ausdrücke für die Summen

$$D_n(x) := 1 + 2 \sum_{k=0}^n \cos(kx) \quad \text{und} \quad S_n(x) := \sum_{k=1}^n \sin(kx).$$

Hinweis: Eulersche Formel $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$.

60. Die Folgen $(a)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b)_{n \in \mathbb{N}}$ seien wie folgt definiert:

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Zeigen Sie: Die Folge $(a)_{n \in \mathbb{N}}$ wächst streng monoton, die Folge $(b)_{n \in \mathbb{N}}$ fällt streng monoton, und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < e < b_n$.

Hinweis: Untersuchen Sie die Quotienten $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ und $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ und verwenden Sie die Bernoullische Ungleichung.

61. Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ bzw. bestimmen Sie den Wert:

$$(a) \quad e^z = -5 \quad (b) \quad \log(1 - i).$$

62. Zeigen Sie folgende Grenzwerte ($a > 0$):

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1, \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\ln(x)}}{e^x} = 0, \quad (c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln(a).$$

Hinweis: Satz vom Wachstum.