Übungsblatt 12

63. Gegeben sei die Folge $x_1 := x \in [-2,2]$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Zeigen Sie, dass der Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2-x_n}$$
existiert, und bestimmen Sie seinen Wert.
Hinweis: Setzen Sie $x = 2\cos(y)$ und verwenden Sie die Halbwinkelsätze ($0 \leq \theta \leq \pi$)
$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}, \quad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}.$$

64. Zeigen Sie, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ Polynome T_n und U_n vom Grad n gibt, sodass
$$\cos(nt) = T_n(\cos(t)) \text{ und } \sin((n+1)t) = U_n(\cos(t))\sin(t) \tag{1}$$
für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie, dass diese Polynome die Rekursionsgleichungen
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ und } U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$
mit den Startwerten $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, bzw. $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ erfüllen. Bestimmen Sie die Nullstellen und die Extremstellen von T_n (*Hinweis:* (1)).

65. Sei : $(a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty.$$
    (a) Geben Sie die formalen Ausdrücke für die beiden Grenzwerte auf.
    (b) Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.

66. Sei $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Gleichung
$$\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n} = c$$
hat im Fall $c = 0$ genau $n-1$ reelle Lösungen, im Fall $c \neq 0$ genau n.

67. Geben Sie Definitionsbereich von f und f' für folgende Funktionen f an:
    (a) $\sqrt{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}$,
    (b) $\operatorname{Artanh}(e^x - 1)\ln(x + \cos^2(1/x^2))$,
    (c) $\frac{1}{|x+1|} + \frac{1}{|x|^3} + \frac{1}{|x-1|}$,
    (d) x^{x^x}.